定量社会学

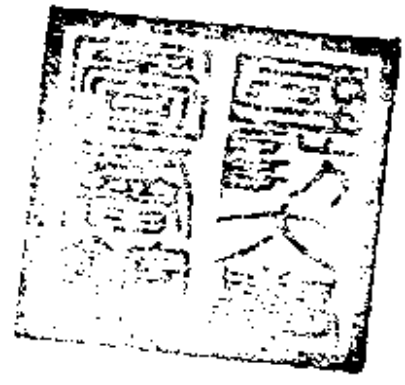
VISIT…

2 020 7854 4

定量社会学

〔联邦德国〕韦德里希 哈格原著
郭治安 姜 璐 沈小峰 编译

四川人民出版社
一九八六年·中国成都



责任编辑：安庆国
封 面 图：广 军
插 图：张深琪
装 帧：盛寄萍

走向未来丛书

定量社会学

郭治安 姜 璐 沈小峰 编译

四川人民出版社出版（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行
自贡新华印刷厂印刷

开本787×960mm 1/32 印张10.25 插页 6 字数 160 千
1986年 9 月第一版 1986年 9 月第一次印刷
书号：17118·149 印数：1—33,000

定价：1.50 元

《走向未来》丛书顾问

（按姓氏笔划为序）

包遵信　严济慈　杜润生　张黎群　陈一咨
陈翰伯　钟沛璋　侯外庐　钱三强

《走向未来》丛书编辑委员会

主　编：金观涛

副主编：陈越光　唐若昕

编　委：（按姓氏笔划为序）

丁学良　王小强　王岐山　王军衡
王晓鲁　王　焱　尹蓝天　乐秀成
朱嘉明　朱熹豪　刘　东　刘青峰
严家其　何维凌　张　钢　阮芳赋
陈子伶　陈越光　易小冶　金观涛
秦晓鹰　贾新民　翁永曦　唐若昕
陶德荣　黄江南　董秀玉　樊洪业
戴士和

编者献辞

《走向未来》丛书和读者见面了。

她凝聚着我们的心血和期望。

我们期待她能够：展现当代自然科学和社会科学日新月异的面貌；反映人类认识和追求真理的曲折道路；记录这一代人对祖国命运和人类未来的思考。

我们的时代是不寻常的。二十世纪科学技术革命正在迅速而又深刻地改变着人类的社会生活和生存方式。人们迫切地感到，必须严肃认真地对待一个富有挑战性的、千变万化的未来。正是在这种历史关头，中华民族开始了自己悠久历史中又一次真正的复兴。

在艰苦而又富有生命力的改革道路上，我们坚定了马克思主义的信仰，理解了科学的价值，并逐

步深化了对我们时代和民族的认识。今天，我们听从祖国的召唤，热情地投身于实现社会主义现代化的伟大潮流。

马克思有一句名言："思想的闪电一旦真正射入这块没有触动过的人民园地，德国人就会解放成为人。"* 今天，照亮我们民族的思想闪电，就是马克思主义、科学精神和我们民族优秀传统的结合，以及由此开始的创新！

《走向未来》丛书力图从世界观高度把握当代科学的最新成就和特点，通过精选、咀嚼、消化了的各门学科的知识，使读者特别是青年读者能从整个人类文明曲折的发展和更迭中，理解中华民族的伟大贡献和历史地位，科学地认识世界发展的趋势，激发对祖国、对民族的热爱和责任感。

她特别注重于科学的思想方法和新兴的边缘学科的介绍和应用；把当前我国自然科学、社会科学、以及文学艺术方面创造性的成果，严肃地介绍给社会，推动自然科学与社会科学的结合。

《丛书》是个新的园地，她将自始至终贯彻严肃认真的学风和生动活泼的文风。

---

* 《马克思恩格斯选集》，人民出版社，1975年版，第1卷，第15页。

《走向未来》丛书，从她一开始就受到老一辈共产党人关怀，受到学术界前辈的热情支持。

约四百年前，弗兰西斯·培根在《伟大的复兴》一书序言中，曾经这样谈到书中描述的对象，他“希望人们不要把它看作一种意见，而要看作是一项事业，并相信我们在这里所做的不是为某一宗派或理论奠定基础，而是为人类的福祉和尊严……。”我们怀着真挚的感情，把这段话献给《丛书》的读者，希望广大读者关心她、批评她、帮助她。

让她成为我们共同的事业。

《走向未来》丛书编委会

一九八三年六月于北京

序

在当代自然科学奔向社会科学的强大潮流中，各门传统的学科，诸如数学、物理学、化学和生物学的原理和方法，都在以不同的方式向社会科学领域移植和渗透。其中，联邦德国斯图加特大学理论物理学教授赫尔曼·哈肯（Hermann Haken）于七十年代创立的协同学，在社会系统中的应用取得了显著的进展。协同学和社会学的结合，在八十年代诞生了一门新兴的交叉学科——定量社会学。

自从1836年法国实证论者孔德（Comte）建立社会学以来，经过一百多年的发展，社会学已成为人文科学的一门重要学科。一般地说，社会学研究社会组织、社会结构、社会功能等内容，同时也讨论一些社会现象，如人口、婚姻、家庭、教育、宗教等问题。但是，由于社会现象极端复杂，很难定量

化，因此，迄今为止，社会学大都只能对社会现象进行定性的讨论，侧重于归纳和综合，而很少进行定量的分析、演绎和推论，致使社会学至今主要还是一门描述性的学科。

1977年前后，比利时的伊·普里戈金（I·Prigogine）和西德的哈肯在研究由大量要素（子系统）构成的，相互间存在着复杂的非线性相互作用的开放系统的过程中，分别提出了耗散结构理论和协同学，这不仅大大促进了物理学、化学和生物学的发展，而且也为社会科学提供了一种新的理论观点和定量的研究方法。

一般说来，物理学中的概念和方法可以通过两条途径应用于社会现象的研究。一条是通过结构的类似性进行定性的讨论，这方面的成果可参见哈肯所著的《自然成就的秘密：协同学：合作理论》一书；另一条途径是运用详细的定量的数学方法进行研究和定量的计算，这方面的工作集中反映在韦德里希（W·Weidlich）和哈格（G·Haag）合著的《定量社会学的概念和模型》一书中。这本书的出版标志着社会学开始从定性走上了定量化的道路。

社会过程的数学化和物理过程的数学化具有不

同的特点。一个不同的特点是可预言性问题。经典的物理学认为，根据拉普拉斯决定论，只要知道了初始条件和运动方程，我们可以准确地预言未来任何时刻的物理进程。然而在社会学中，即使对短时期的发展过程，也不可能作到这一点。近年来发展起来的相变理论和协同学指出，当物理系统的宏观状态发生显著变化时，我们也不能确切预言随后出现的宏观状态。但是我们可以用协同学来研究在物理学和社会学的各个领域中这种宏观变化的共同特征。在处理这类问题时，物理学和社会学的可预言性没有本质差别。

另一点不同是可重复性问题。在物理学中（天体物理学例外），我们可以不断重复去做一个实验。因此，即使单个的实验结果具有不确定性，但可以通过多次重复来求得实验结果的分布函数，与理论进行比较，从而确定符合的程度。而社会过程具有历史性，它是由一些不能重复的特殊事件所组成。现在，这一困难，也在逐步被克服。我们可以利用协同学建立的定量模型来考察社会集体现象的机制，并可在较小范围内用试验来模拟，例如通过在一定范围内进行民意测验，求出分布函数，再与社会的真正过程进行比较。当然，这种办法具有很

大的局限性，但是，在处理社会问题时运用数学模型的方法可以帮助我们更好地作出假定。

本书主要参照联邦德国斯图加特大学教授韦德里希博士和哈格博士合著的1983年出版的《定量社会学的概念和模型》（Concepts and Models of a Quantitative Sociology）一书编译而成。全书共分六章，第一章综合介绍了协同学的基本概念和方法，着重对在定量社会学中经常应用的概念、公式、方程作了说明。第二章以舆论的形成为例，对半定量社会学作了简短介绍。第三章介绍了定量社会学中所运用的基本概念和方程。第四章讨论了包括生灭过程和迁徙过程在内的人口动力学。第五章和第六章分别讨论了当代社会生活中两个根本问题：经济发展问题和战争与和平问题，并建立了初步的模型。

定量社会学是一门崭新的学科，它目前还很不完善，很不成熟，还有许多问题没有解决，有待我们去进一步探索。我们编译这本小书的目的，在于引起我国的社会学学者和对研究社会学问题有兴趣的自然科学工作者，特别是广大的年轻科学工作者对这门学科的兴趣，以推动我国交叉学科的发展。

我们的自然科学和社会科学水平不高，书中错误之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编译者

1985年8月

目 录

第一章 引 论…… 1

1-1 自然科学中的协同概念 …… 4

简单的回顾 …… 4

物理、化学系统 ……11

物理、化学系统中的动力学和运动方程……16

1-2 社会学中的协同概念 ……31

定性研究中的说明 ……34

定量社会学中的协同概念……38

1-3 定量社会学的意义和局限 ……46

第二章 定量化的探索……53

——舆论的形成

2-1 模型 ……56

2-2 运动方程 ……57

$p(n, t)$ 的主方程……57

p（x，t）的福克—普朗克方程 …… 61
x（t）的朗之万方程 …… 66
平均值方程 …… 68
2-3* 运动方程的解 …… 71
定态解 …… 72
含时解 …… 75
2-4 转移概率的选择和模型的形式 …… 90
2-5 模型的社会含义 …… 96
第三章 定量社会学的基本概念 …… 109
3-1 态度空间、社会构形和局势空间 …… 111
3-2 社会构形的运动方程 …… 116
主方程 …… 117
随机方程和福克—普朗克方程 …… 123

标题上带有星号“*”的节，初次阅读时可以略去。

朗之万方程和福克—普朗克方程* …… 132
近似平均值方程 …… 142
精确平均值方程* …… 145
3-3 趋向参数和局势矢量动力学 …… 150
3-4 社会构形总变量的平均值方程* …… 154

第四章 人口动力学 …… 169
——迁移和生灭过程
4-1 一般模型 …… 173
4-2 两市区间两相互作用人群的迁移 …… 179
主方程、平均值、方差和福克—普朗克方程 …… 180
方程的相关解 …… 188
4-3 单个人群内的生灭过程 …… 209
随机描述和确定描述的关系 …… 210

多步生灭过程* …… 224
4-4 两物种之间的迁移和捕食者 — 被捕食者的相互作用 …… 232
特殊模型的主方程和平均值方程 …… 233
有无非线性迁移时捕食者—被捕食者模型的比较 …… 238

第五章 关于投资的非平衡理论 …… 247
5-1 引论 …… 249
5-2 模型的建立 …… 251
投资者构形 …… 253
投资者构形的运动方程 …… 255
投资者构形分布的参量 …… 259
5-3 运动方程的分析 …… 264
稳定性分析 …… 264

数值分析…… 265
5-4 联邦德国经济的实际考查 …… 268
联邦德国经济的实际发展…… 269
不同参数值的具体分析 …… 271
联邦德国投资曲线的解释…… 272

第六章 战争与和平问题…… 277
6-1 关于国家关系的理论模型 …… 280
有关变量的再讨论 …… 281
变量的运动方程 …… 287
6-2 模型解的讨论 …… 295
方程中参数值的规定 …… 296
计算机结果的分析 …… 298

第二章

引　论

定量社会学是协同学在社会经济系统的应用和发展，是现代自然科学和社会科学相结合的最新结晶。它把社会学置于严密的数学物理基础之上，无疑是社会学走上新的研究阶段的重要标志。定量社会学旨在建立和发展一种定量描述各类社会现象的动力学的理论体系，它应用和发展了协同学的概念和方法，是横断学科中的一个新的分支。

在这一章中，主要介绍和定性说明有哪些具体社会问题能够用定量或至少半定量的方式进行社会动力学的研究。本章共分三个部分：

首先，阐述了协同学的有关概念和方法，尤其是协同概念在物理、化学系统中的新发展。

接着讨论了用协同学的概念可以描述哪些社会现象，以及目前尚有哪一类的问题还不能够用协同

学进行概念上和数学上的处理。

最后讨论一下定量社会学与传统社会学之间的关系。

1-1 自然科学中的协同概念

从统计物理学到相变理论，从非平衡统计到耗散结构理论的形成，协同学在汲取它们大量营养的基础上，提出了一整套新的概念和方法，成为研究非平衡相变（包括平衡相变）的条件和规律的独具一格的新的横断学科。因此，在协同学中所涉及到的术语、概念和方法，既与其它学科有关又有自己的新发展。

简单的回顾

蒸汽机的应用促进了热力学的发展，而从微观角度解释宏观量及对热力学规律的探索则形成了统计物理学。长期以来，人们对“统计”的认识存在着分歧：一些把牛顿力学奉若神明的人认为，如果能够把各个分子的运动方程列出来，求解各个方程

就会知道系统的一切了，这种方法的困难是由于系统中的分子数多达10^{20}以上，用计算机亦难于求解，因此不得不采用统计方法。另一种看法认为，牛顿力学只反映了各个分子的运动，但当大量分子组成系统时，由于分子之间的相互关联，系统中会出现集体模式的运动，而统计方法正是描述这种整体的运动规律的。比如波在媒质中传播时，当我们考察各个质点，便得到初始条件不同的各个振动过程；当我们去看各个质点组成的整体时，便得到波长、波速、波峰、波谷、能量流等单个质点运动所不具备的物理量和概念。这正好说明了企图求出各个质点的运动代替整体运动的看法是错误的。近十几年来相变理论的发展，尤其是协同理论的发展表明，宏观规律是子系统间关联程度的反映，是整体运动的根据，否则就无法解释化学振荡、激光的产生、铁磁相变、超流超导等现象，以至于组成人体的大量分子何以产生了区别于其它分子群的高级运动。

我们把研究的宏观体系称为系统，而把组成系统的大量下一层次的微观客体称为子系统。比如一个化学反应系统的子系统就是反应过程中各种原子或分子，激光系统的子系统就是大量的激活原子和

光子，社会系统的子系统往往是社会单位（家庭、工厂等）或个人。

人们为了研究的方便，根据系统与外界环境的关系把系统分为三类：一类是孤立系统，它忽略了系统与外界环境的能量交换和物质（包括信息）交换，是自然界存在的某些系统的理想状态，是人们研究最早的简单系统。一类是封闭系统，它和外界环境有能量交换而无物质交换，热力学第一定律就描述了这类系统。再一类就是在自然界大量存在的开放系统，开放系统既和外界环境有能量交换也有物质交换，发展演化的社会经济系统大部分是开放系统。

当人们研究系统的演化规律时，首先了解的是平衡相变。最初人们把物质存在的固、液、气三种状态称为三种相，以后把“相”的概念加以推广，把不同的物理状态也称为不同的相，比如铁磁体的磁化前后。而平衡是指相变过程中系统各部分之间的力学平衡（压强相等）、热学平衡（温度相等）、化学平衡（化学势相等）等。平衡相变发生在封闭系统。系统在转变前后的两种相间存在着质的不同，例如气——液——固的转变过程中密度的突变、铁磁相变前后的磁感应强度的不同等。为了

表示相变后某个量的突变引入了序参量的概念，序参量的大小表示相变前后系统有序程度的变化，比如激光系统的电磁场、化学反应中的某种粒子数、气——液——固转变过程中的密度或平均分子间距等。通过序参量的变化表示了相变前后系统所发生的质的变化，突出了转变特征，因此序参量的概念在协同学中被普遍采用。所有的平衡相变按照系统自由能的变化情况可分为两类：一级相变是指相变前后系统的自由能的一阶导数发生不连续的变化。二级相变是指系统的自由能的二阶导数发生不连续的变化，但它的一阶导数是连续的，因此往往又叫做连续相变。然而要从理论上阐明临界指数，只是到了本世纪七十年代，用重整化群技术才作到了这一点，从而使相变理论达到了基本成熟的地步。

人们对非平衡系统的研究，几乎和平衡系统的研究一样早，但到了本世纪六十年代以后尤其是七十年代才取得了突破性的进展。在三十年代昂萨格（Onsager）提出了著名的倒易关系，描述了近平衡区的各种输运系数之间的关系。后来普里戈金提出了最小熵产生原理，描述了近平衡区的发展最终归于平衡态。这一时期理论的研究一直在近平衡区，并且预见在该区不可能形成新的结构。到了六十年

代，普里戈金从热力学出发研究化学振荡时，发现在远离平衡态处，系统在一定外界能量流、物质流的保证下能够形成新的稳定的结构——即耗散结构。耗散结构理论为研究自然界乃至社会经济中的开放系统，为研究宇宙演化、生命演化打开了通道，引起了科学界的普遍重视。联邦德国理论物理学家哈肯教授在研究激光形成的理论时，发现在不同条件下形成的激光过程有着不同的特点。尽管激光是远离平衡所发生的相变，然而分别具有对应于平衡相变中一级或二级相变的特性，而且还具有比平衡相变丰富得多的新的内容。各学科中的非平衡相变可以分为若干类，每类之间的类似远远超越了学科的界限，遵守着相同的运动方程。因此，哈肯得出了相变过程与子系统性质无关的结论。是什么左右着相变的特点和规律呢？哈肯经过了大量的类比和分析发现，正是子系统之间的关联所引起的协同运动的结果。“协同”二字在相变中的含意在于：子系统关联引起的协同作用使得整个系统从无序变为有序——出现了序参量，序参量之间的合作和竞争最终导致了只有少数序参量支配系统——这是在更高程度上的协同。协同学是研究在各个领域中由大量子系统所构成的系统，当系统的控制参量（外界

环境提供的能量流、物质流、信息流）达到临界值时系统中产生相变的规律和结果。哈肯在协同学中开始主要是研究从无序到有序的转变规律，后来他在《高等协同学》中进一步研究了无序到有序、有序到有序以至混沌状态的演化序列。哈肯认为就所研究的内容而论，协同学把达尔文主义推广到非生物界的自然系统，把达尔文主义数学化，是广义的达尔文主义。

协同学对系统采用动力学和统计学相结合的考查方法，因此系统的运动和转变就由动力学得出的必然性与统计学得到的随机性共同决定。描述系统的量叫宏观量（序参量就是一种宏观量），宏观量是由相应的微观量的统计平均得到的，也就是通过概率及其概率分布得到的，因此在通常状况下系统的物理量（或其它量）的瞬时值在平均值附近波动，我们把波动的幅度叫涨落。当系统不在临界区时，涨落的大小远比物理量的大小小得多，因此涨落对系统的影响几乎可以忽略。系统中各个子系统的运动状态由子系统的独立运动（比如热运动）和子系统间关联引起的协同运动所决定。当子系统之间的关联能量小于子系统独立运动能量时，子系统的独立运动占主导地位，形成不了一种整体的规律

运动特性，系统便处于无序状态（比如箱中自由运动的气态分子）。当子系统之间关联能量大于子系统的独立运动能量时，子系统的独立运动便受到束缚，子系统的独立运动要服从由关联形成的协同运动，于是运动便显示出有序的特征。涨落是系统中的各局部子系统间相互耦合变化的反映。系统在非临界区时，独立运动和协同运动能量的相对大小未发生质的变化，涨落强度相对较小。在环境作用到系统上的控制参量变化时，子系统的独立运动能量和子系统间协同运动能量的相对大小也在变化。当控制参量达到临界值时，独立运动和协同运动的相对地位几乎处在均势状态，因此局部子系统间可能的各种耦合相当活跃，涨落相对变大。每个涨落都具有特定的内容，代表着一种结构或组织的“胚芽状态”。涨落的出现是偶然的，但只有适应系统动力学性质的那些涨落才能得到系统中绝大部分子系统的响应而波及整个系统，将系统推进到一种新的结构状态。对涨落的深入理解包含着深奥的哲理，而在协同学中是根据具体过程得到涨落，把它作为已知量来处理的。

对于定量社会学中用到的一些有关协同学的概念，下面我们将结合物理学、化学中的具体例子予

以说明。

物理、化学系统

在物理、化学系统中，子系统是由构成物质的基元所组成。这些基元可以是中子、质子、电子、光子或其结合单元（原子和分子）等。基元之间的相互作用已经研究清楚了：在基元粒子之间有强相互作用、电磁相互作用、弱相互作用以及万有引力相互作用。比较复杂的相互作用诸如决定化学键的原子之间的相互作用力以及气体分子间的范德瓦尔力都来源于这几种基本的相互作用，主要是电磁相互作用。

各个基元的位置、动量和它们之间的相互作用构成了作为物理、化学系统基础的微观世界。

在另一方面，由大量基元所构成的系统的“总体”性质也比较容易通过实验进行宏观测量。

系统和外界[illegible]相互作用用控制参量的大小来表示。在[illegible]，控制参量是系统和外界交换的能量流，比如将一根金属棒的两端分别与温度恒定的高温热源T_1和低温热源T_2接触时，最终金属棒上各点都有一个恒定温度，各点温度不同形成

了温度梯度，金属棒处于非平衡的稳定状态，但这个状态是靠与热源交换的能量流——控制参量来维持的，没有这种能量流作保证就不能出现稳定的非平衡状态。在开放系统中控制参量表示能量流、物质流，例如在化学反应中要保持在一定的浓度和速率下进行反应，就需不停地向反应器中输入参加反应的粒子，同时不停地从反应器中取出反应生成的粒子。从这里就会体会到，非平衡的定态是一个吐故纳新的活的组织结构，而平衡状态是和外界没有这种交换的“死”的组织结构。

描述系统的宏观状态要用它的一组宏观量，在定量社会学中叫做集体变量或宏观变量。宏观变量是子系统相应的微观量对系统的贡献的总和。在系统发生相变过程中，如某个宏观量从无到有并体现了新结构的有序特征，它就是序参量。一般的宏观量可以是压强、密度、熵、能量流、粒子流以及表征场和粒子的宏观状态或动力学时一空结构的关联函数及其进一步的参数。

对于开放系统来说，当改变系统的控制参量并达到其临界值时，系统的宏观状态就要出现一个根本的变化，也就是宏观的序有了新的特征。因此寻找序参量是极为重要的。如果连续的改变控制参

量，它会经历一系列的临界值，系统的宏观状态的演化出现了一个序列。如果第一次的相变是从无序到有序，以后的相变是从有序到有序，也就是旧序消失，新序出现了。当控制参量的变化方向相反时，系统的演化就经历了一个逆过程。在人类社会中，随着生产的发展技术的进步，人类从自然界获得了愈来愈大的能量流、物质流、信息流，促使了生产关系的一再改变，已经经历的主要相变是原始公社制社会——奴隶社会——封建社会——资本主义社会——社会主义社会。它具有与自然现象类似的开放系统的演化规律。

控制参量是系统演化的外在条件和保证，子系统之间的独立运动和协同运动的对立和统一是系统演化的内在因素，序参量是演化程度的宏观表现。

由此可见，在相变过程中找到了序参量的变化，就抓住了演化的本质和进程。在协同学中已经有了一套寻求序参量的专门的方法，即绝热消去原理（在《高等协同学》中它与中心流形定理、慢流形定理一起叫做伺服原理）。子系统的所有微观变量或其集合的宏观变量可分为两类：一类是在相变过程中阻尼大，衰减快，对相变的性质和过程影响不大的变量，我们叫它快弛豫参量。这类参量就象

社会大变动时期昙花一现的人物一样，可以忽略不计。另一类就是出现了临界无阻尼的慢弛豫参量，它主宰着演化过程的始终，往往只有几个甚至一个。运用绝热消去原理消去快弛豫参量、剩下的少数慢弛豫参量就是系统演化的序参量。

序参量通过信息反馈支配着所有其它的快弛豫参量，支配着子系统的行为，按照序参量的旨意在系统中出现了井然有序。因此绝热消去的过程就是快弛豫参量伺服于序参量的过程。

序参量来源于系统内部，不是外界强加给系统的，比如外界泵浦给激光器的能量（控制参量）是无规能量，但激光器输出的却是高度有序化的激光，激光的序来源于子系统。正象人吃食物长成了人的细胞，狗吃了同样的食物也只能长成狗的细胞，其原因是内部的选择吸收不同，也就是内部的组织结构不同。但序参量一旦出现就会主宰系统进入有序化，这种有序化结构在一定的扰动下是稳定的（稳定性分析），人们把这种过程叫做自组织过程，把这种组织结构称为自组织。人类社会的相变就是一种自组织过程（这里是从生产力发展角度而言，不包括外国策动的局部政变在内）。

下面我们通过两个实例说明这些概念：

a)。在一定容积下的均匀气体，当温度降低到临界温度T_c（控制参量）以下时便出现了液态和液态上面的气态的分离状态，表征气体液化的宏观序的变化的序参量是在T_c以下时液态和气态的密度差，或分子平均距离之差。

b)。在激光产生的过程中，当泵浦功率（控制参量）较低时，激活原子进入受激状态的比例较少，原子的发光过程主要是自发辐射，各个受激原子所发的光是彼此无关联的，激光器所发出的光和普通的光源一样，整个光场处于杂乱无章的无序状态。激光系统的子系统是大量的激活原子和光子。当泵浦功率达到临界阈值P_c时，激光器中激活原子一半以上处于高能级的受激状态——粒子数反转，此时原子以受激辐射为主，发出了同方向同频率同位相的整齐化一的激光。这时新出现的激光强度（或电磁场强度，或光子流强度）就突出表明了受激作用相的有序程度——即序参量。

例a)是一种热平衡相变，例b)是远离热平衡状态的动力学相变——一般称为非平衡相变。

当控制参量达到临界值时，在系统中出现了很强的临界涨落，涨落的内容与新出现的序参量密切有关。在例a)中，当$T \geqslant T_c$时，通过气体的散射测

量到这种临界密度的涨落有气体密度和液体密度的状态，这预示着气体将分离为气体和液体的状态，这也就是所谓临界乳光现象的实质。在例b)中，当控制参量 $P \leqslant P_c$ 接近临界阈值时，即在激光作用出现之前系统中就出现了预备建立 $P \geqslant P_c$ 时激光相的那种光子的巨涨落。

物理、化学系统中的动力学和运动方程

在物理、化学系统中，一个系统所包含的子系统数目往往在阿佛加德罗常数的数量级10^{23}，每个子系统又往往有平动、转动、振动等自由度，因此一个系统的微观自由度的数目是相当庞大的。如何从等于微观自由度数目的大量微观变量得到几个表征系统特征的宏观变量，这一直是统计物理学和协同学所讨论的重要问题之一。同时我们也看到，当环境对系统作用的控制参量变化时，系统的宏观变量和状态就要改变，尤其是在临界区系统中发生了质的变化，可以用适当的运动方程来描述在外界环境的作用下系统的动力学行为。

一般来说，要得到这类方程的通解是相当困难的。但在具体情况下解决具体问题时，我们往往可

以对系统作一些近似或合理的假设，使问题得以简化后，求解这类唯象的方程还是大有希望的。我们现在介绍这些方程的简单的直观的形式。在宏观变量的精确的运动方程里应当包括：一是宏观变量之间的相互影响作用；二是作为宏观变量的背景，即系统中含有的大量的微观变量，这些微观变量产生了骤变涨落的随机力。

从唯象角度或从基本动力学的考查所得的这类方程中最简单的形式就是“朗之万方程”，它是时间t的一组一阶微分方程：

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = F_i(x_1, \cdots, x_n) + f_i \qquad (1.1)$$

$$i = 1, \cdots, n$$

这里的f_i就是涨落随机力，而$F_i(x_1, \cdots, x_n)$一般是宏观变量$x_i(t)$的非线性函数。

为了阐明这组方程的物理意义，我们写出布朗运动的朗之万方程

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}p_i$$

$$i = 1,2,3 \qquad (1.2)$$

$$\frac{dP_i}{dt} = -\gamma P_i + f_i$$

1827年，英国植物学家布朗把花粉撒在静止的液体中后，发现花粉并不静止在液体中，而是在液体中

作着无规则的运动即布朗运动。将液体的温度升高时这种无规则运动便更加剧烈。后来人们才明白，布朗粒子的无规则运动是由于周围分子的热运动对它碰撞的结果，由于布朗粒子的体积和质量远大于分子，因此当大量分子对它的碰撞不平衡时它便在合力方向产生加速度。所以布朗粒子的无规则运动是液体中分子无规则运动的反映。这里的x_i和p_i表示布朗粒子的位置和动量，$i=1,2,3$表示有三个分量。布朗粒子受到周围分子的碰撞是随机作用，周围碰撞的不平衡引入一个“随机”涨落分量f_i，同时在布朗粒子没受随机涨落碰撞时的直线运动阶段要受到液体粘滞的“惯常”阻力$-\gamma p_i$，γ是阻尼系数。如果布朗粒子不受随机涨落作用时，在阻力作用下最终便会静止。但是f_i的作用使布朗粒子不停的作着无规则运动，在显微镜下便可观察到布朗运动（图1.1）。

为了讨论朗之万方程的一般物理意义，在统计物理中引入了系综的观点：一个宏观系统的系综是指那些系统的成分和宏观变量都相同而微观上不同的所有可能系统的集合。一个系综中宏观系统的数目α可通过排列组合的统计办法得到，它与不能在实验中进行控制的微观涨落随机力f_i不能相提并

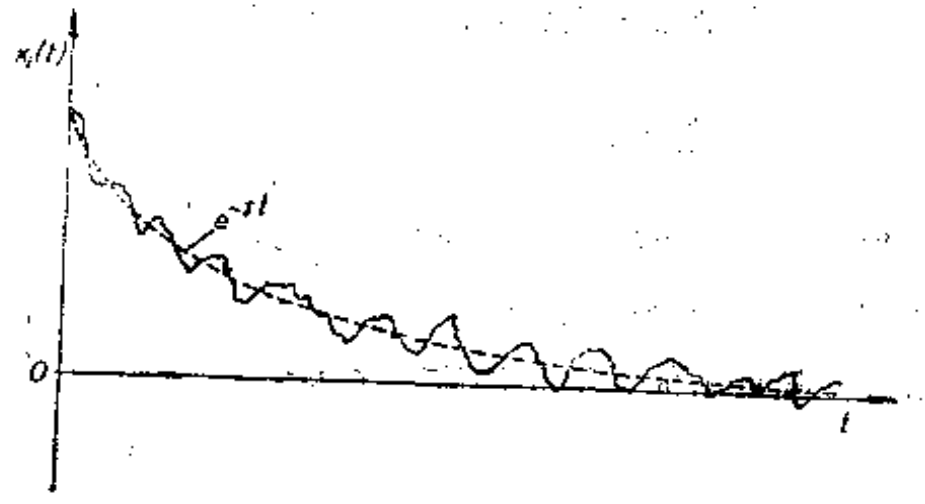


图1.1 布朗运动的径迹$x_i(t)$

论。虽然在一个系综的各个系统中的宏观变量具有相同的初始条件$x_i^\alpha(0)$，但由于方程(1.1)中的微观涨落力不同，因此在系综的各系统中便得到了不同的径迹。我们旨在寻找统计规律而不在于个别的偶然现象，往往以系综平均或系综平均值$\langle x(t)\rangle$来表示量$x^\alpha(t)$的一般时间关系。如果系综由样本$\alpha=1,\cdots,\omega$个径迹 $x_i^\alpha(t)$所组成，系综平均值的定义是

$$\langle x_i(t)\rangle = \frac{1}{\omega}\sum_{\alpha=1}^{\omega} x_i^\alpha(t) \qquad (1.3)$$

我们再来讨论涨落随机力，由于我们缺乏系统微观状态的全部信息，我们只能得到（或唯象假设）通过系综平均表示的这种力的某些系综性质。

对于大量系统来说其随机力遵守下述方程

$$f_i(t)=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_1(t),\cdots,x_n(t))\xi_j(t) \quad (1.4)$$

方程（1.4）意味着$f_i(t)$由随机力$\xi_j(t)$以及一般依赖于宏观变量的强度因子$g_{ij}(x_1,\cdots,x_n)$的和组成。随机力的系综平均值等于零

$$\langle\xi_j(t)\rangle=0 \quad (1.5)$$

再者，随机力与相同时刻或以前的宏观变量没有关联，也就是不受相同时刻和以前的宏观变量的影响

$$\langle\xi_j(t+\tau)G(x_1(t),\cdots,x_n(t))\rangle=0 \quad 当\tau\geqslant 0 \quad (1.6)$$

从以上便可得出

$$\langle f_i(t)\rangle=0 \quad (1.7)$$

但是，随机力$\xi_i(t)$与很短时间内的随机力$\xi_i(t)$是关联的

$$\langle\xi_j(t+\tau)\xi_i(t)\rangle=\delta_{ij}\,\delta(\tau) \quad (1.8)$$

这里的$\delta(\tau)$就是所谓的δ-函数。为了讨论方程(1.1)的解的可能形式，我们分两种结构予以分析。

a) 假定从相同初始值$x_i^0(0)$开始时，方程(1.1)的解也就是在整个时间发展过程中单个样本的径迹，$x_i^0(t)$基本上不偏离它们的平均值$\langle x_i(t)\rangle$。在

这种情况下方差（平均方差）定义为

$$\sigma_i(t) = \langle (x_i(t) - \langle x_i(t)\rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle x_i^2(t)\rangle - \langle x_i(t)\rangle^2 \qquad (1.9)$$

方差的大小反映了涨落的大小。当用平均值表示时，方程(1.1)中的一项化为

$$\langle F_i(x_1(t),\cdots,x_n(t))\rangle \approx F_i(\langle x_1(t)\rangle,\cdots,\langle x_n(t)\rangle) \qquad (1.10)$$

再利用方程(1.7)式，便将方程(1.1)化为平均值$\langle x_i(t)\rangle$的近似方程

$$\frac{d\langle x_i(t)\rangle}{dt} \approx F_i(\langle x_1(t)\rangle,\cdots,\langle x_n(t)\rangle)$$

$$i = 1,2,\cdots,n \qquad (1.11)$$

按照基本上没有偏离实际样本径迹$x^0(t)$的假定，方程组(1.11)就是平均值$\langle x_i(t)\rangle$的一个自洽封闭的非线性微分方程组。因此，在这种情况下的宏观变量$x_i^0(t)$满足的方程近似可看作一个封闭自持的子动力学方程。引起这种特性的直观原因就是微观变量施加的迅变涨落随机力只引起了宏观变量$x_i^0(t)$在系综平均值$\langle x_i(t)\rangle$附近的小涨落（图1.2）。这种情况就是系统在不发生相变，不在临界区的发展特性。

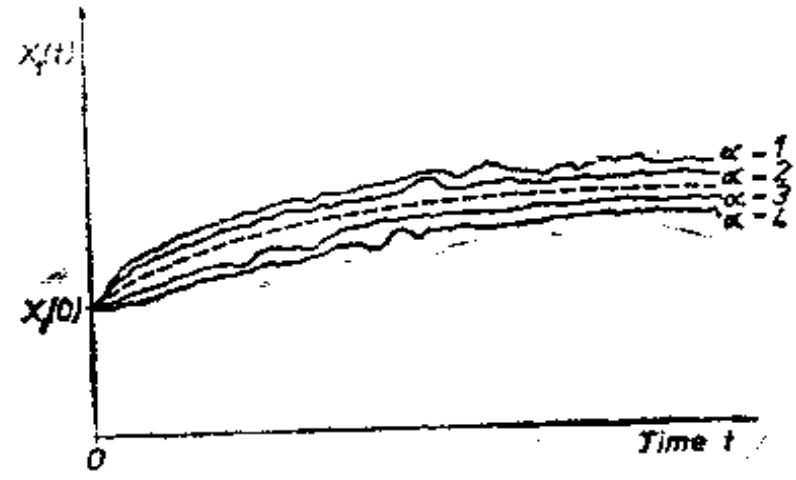


图1.2 准封闭子动力学中宏观变量特性曲线。实线表示系综中几个样本的径迹$x_i^{\alpha}(t)$，虚线表示系综平均值$\langle x_i(t)\rangle$的径迹。

b) 当情况a)条件不满足，系统处在临界区域时，忽略了（1.1）中的涨落力便得到了具有“分岔特性”的方程

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=F_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,n \qquad (1.11a)$$

这表示在“临界值”x_{ic}（比如是一个不稳定的不动点）附近，初始条件$x_i(0)$的稍许变化，方程（1.11a)的解就具有完全不同的径迹$x_i(t)$。然后在方程（1.11a）的右边加上涨落力f_i时便又变为方程（1.1）的形式，但对系综中不同的样本便得到完全不同的（“分岔的”）径迹。换句话说，某种“原因”（即随机力）的无限小的差异就会导致完

全不同的“效果”（即宏观变量的径迹）。

在临界区的各个样本的径迹$x_i^\alpha(t)$与其平均值$\langle x_i(t)\rangle$的偏离十分明显。因而用在非临界区的近似式（1.10）及其子动力学式（1.11）便不再有效了。再者，平均值$\langle x_i(t)\rangle$也不再能代表样本径迹$x_i^\alpha(t)$的特性曲线了（图1.3,1.4）。

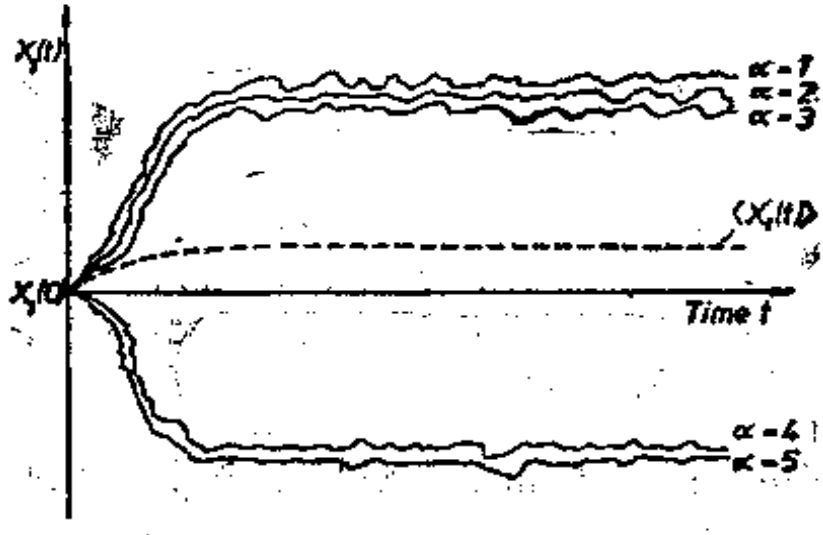


图1.3 表示情况b）时的宏观变量x_i分岔为两个稳定模的特性。实线代表样本径迹$x_i^\alpha(t)$，虚线代表系综平均值$\langle x_i(t)\rangle$。

在a）和b）的两种情况下得到了完全不同的两种结构形式。

在a）中宏观变量遵从渐准封闭自持型的确定性的子动力学。系统的性质和结构不会发生根本性的变化。

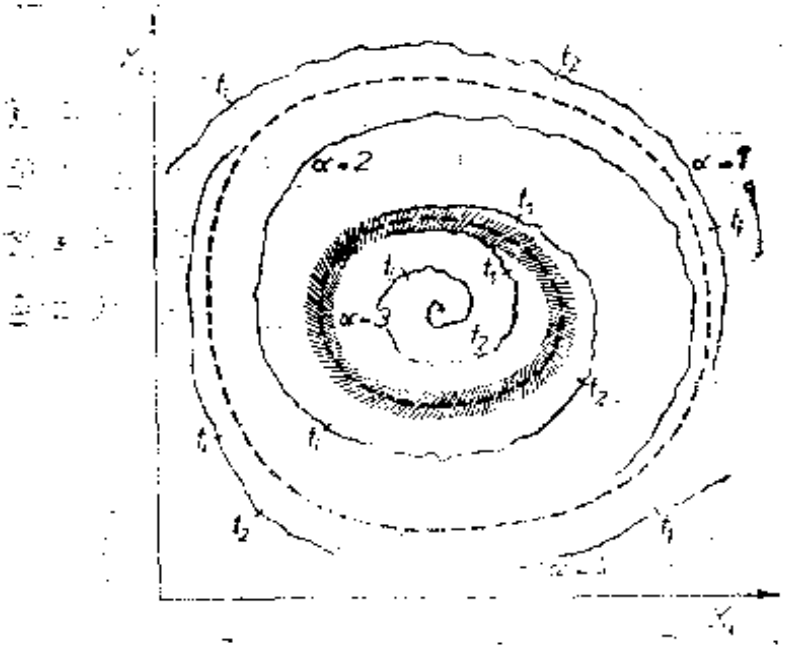


图1.4 在具有一个稳定焦点，一个不稳定极限环（分界线）和一个稳定极限环（点划线）时，两个宏观变量 $x_1(t), x_2(t)$ 的运动。细实线表示 $\{x_1^0(t), x_2^0(t)\}$ 在相平面上的径迹。在阴影表示的临界区中小涨落就会引起分岔。

在b）中，小的和无法预料的微观涨落却决定着临界区域的宏观变量，并最终会引起分岔而进入新的结构状态，即进入了与原来宏观状态不同的宏观状态或相。这就是说情况b）描述了相变过程。

在临界区系统进入新的状态的理论基础大致分两部分内容：第一部分是研究在临界区时方程的原解（即进入临界区之前的宏观变量）变为不稳定的了，在该点出现了两种可能解（即原解分岔），研究分岔为两种可能解的数学理论就是“二分岔理

论”。第二部分是研究解的稳定性问题，这主要解决原解什么时候失稳以及两个新解哪一个是稳定的，系统最终只能进入稳定解所表示的宏观状态，这方面的数学理论就是稳定性理论，如线性稳定性分析、李雅普诺夫函数等。

在进行具体分析时往往把宏观变量作为坐标轴构成相空间（图1.4表示的是变量x_1和x_2的二维相空相），系统状态的变化由相空间中的点随着时间的推移描绘出的径迹表示，这些径迹可能趋于一点或离开一点，该点就是对应方程的定态解，根据趋近或离开这个点的系统径迹的形状，把这些点分别叫做焦点、中心、鞍点等，如果系统是稳定的（比如是稳定焦点），它在相空间中的运动径迹总聚集在该点上，当系统到达临界区时代表系统的奇异点就变为不稳定了，就要出现分岔现象。在二维以上的相空间会出现多维环面等。

现在引入系统的概率分布。考虑到微观变量涨落随机力的影响，在一开始时宏观变量的精确值是不知道的，我们只能研究各个值出现的概率分布函数的情况。

从系综的观点出发引入

$$P(x_1,\cdots,x_n;t)d\tau(\vec{x})$$

其中 $$d\tau(\vec{x}) = dx_1 dx_2 \cdots dx_n \qquad (1.12)$$

表示在时刻t时在 $\{x_i\}$ 和 $\{x_i + dx_i\}$ 的间隔构成的 $d\tau(\vec{x})$ 中找到宏观变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的概率。在第三章将会证明，具有满足（1.4—1.8）涨落力的朗之万方程（1.1）与下述用概率分布函数的福克—普朗克运动方程是等效的

$$\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{ k_i(\vec{x}) p(\vec{x},t) \right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{ Q_{ij}(\vec{x}) p(\vec{x},t) \right\} \qquad (1.13)$$

其中

$$K_i(\vec{x}) = F_i(\vec{x}) + \frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}(\vec{x})}{\partial x_l} g_{lj}(\vec{x}) \qquad (1.14)$$

$$Q_{ij}(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{n} g_{il}(\vec{x}) \cdot g_{jl}(\vec{x}) \qquad (1.15)$$

图1.5和图1.6分别表示了a)（没有分岔）和b)（有分岔）时宏观变量 x_1 的概率分布 $P(x_1,t)$ 的时间变化。根据系综 $x_1(t)$ 的概率分布知道，图1.5和图1.6分别与图1.2和图1.3描述着相同的动力学行为，或者说它们是图1.2和图1.3的直接的进一步的描绘。在第二章还要详细的讨论它的一维情况。

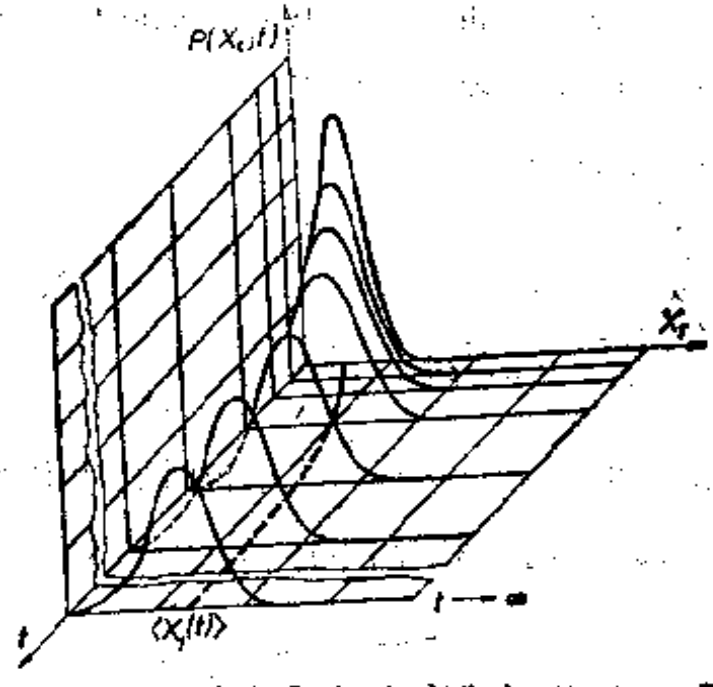


图1.5　在a）的情况下，概率分布p（x；t）及其平均值$\langle x_1(t)\rangle$（短划线）的时间变化。

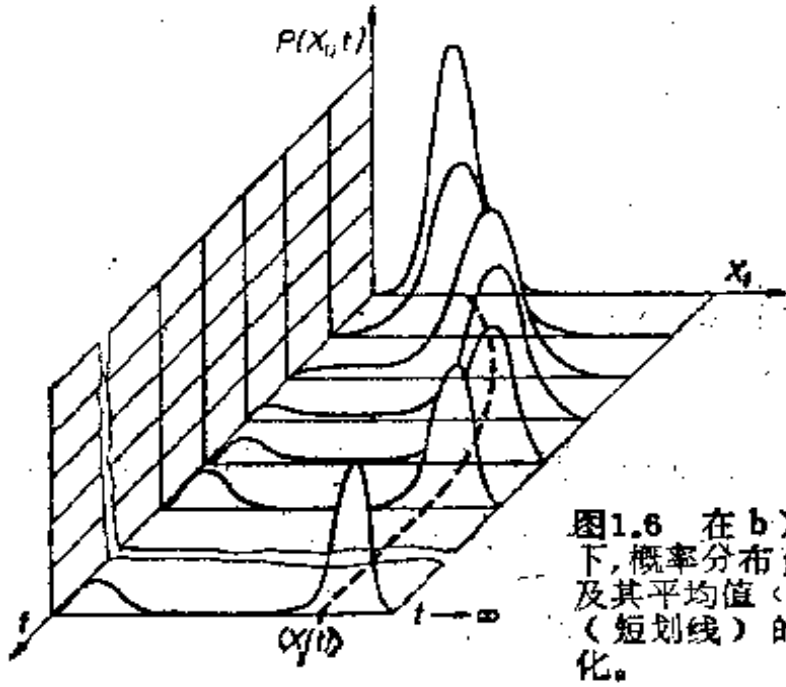


图1.6　在b）的情况下，概率分布$p(x_1;t)$及其平均值$\langle x_1(t)\rangle$（短划线）的时间变化。

在另一方面，也可以从具有特别简单直观解释的$P(\vec{x};t)$的主方程通过取近似而导出福克—普朗克方程。主方程的形式是

$$\frac{\partial P(\vec{y};t)}{\partial t}=\int_{(x)} d\tau(\vec{x})\left[W(\vec{y}\leftarrow\vec{x})P(\vec{x};t)-W(\vec{x}\leftarrow\vec{y})P(\vec{y},t)\right] \tag{1.16}$$

在此，$d\tau(\vec{x})W(\vec{x}\leftarrow\vec{y})$是单位时间从宏观变量值$\{y_k\}$转移到构形空间中体积元$d\tau(\vec{x})$的转移概率。

从概率平衡的角度考虑就可看清主方程(1.16)的意义了：体积元$d\tau(\vec{y})$中概率的时间变化是由于从一切点$\{x_k\}$到体积元$d\tau(\vec{y})$的概率流（（1.16）右边第一项）

$$\int_{(x)} j[d\tau(\vec{y})\leftarrow d\tau(\vec{x})]=$$

$$\int_{(x)}[d\tau(\vec{y})W(\vec{y}\leftarrow\vec{x})]d\tau(\vec{x})p(\vec{x},t)$$

引起$d\tau(\vec{y})$中的概率增加，以及从$d\tau(\vec{y})$到其它所有点$\{x_k\}$的概率流（（1.16）右边第二项）

$$\int_{(x)} j[d\tau(\vec{x})\leftarrow d\tau(\vec{y})]=$$

$$\int_{(x)} [d\tau(\vec{x})W(\vec{x}\leftarrow\vec{y})]d\tau(\vec{y})P(\vec{y};t)$$

引起$d\tau(\vec{y})$中的概率减少。图1.7表明在宏观变量空间的两体积元$d\tau(\vec{x})$和$d\tau(\vec{y})$间存在着两个方向的概率流。

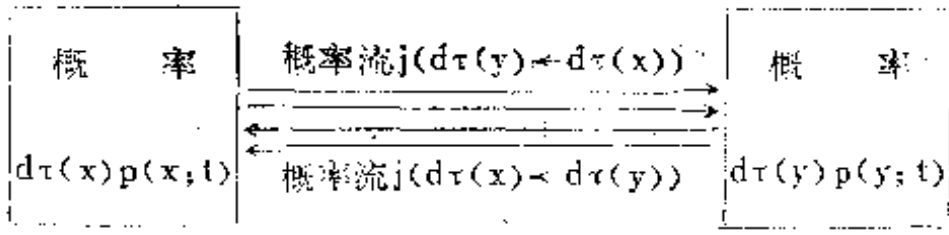


图1.7　在构形空间中两体积元之间的概率流

主方程和福克—普朗克方程具有同一个重要的性质：从一个任意的初始分布（例如在小体积元$d\tau(\vec{x})$的分布）出发，最终总要发展成一个稳定的平衡分布$P_{st}(\vec{x})$。

稳定的不再随时间变化的状态称为定态。当然这是相对于概率分布变化的状态而言的。

将这些结果与（等效的）朗之万方程的景象进行比较便得到如下两点结果：

（1）从任何初始体积元$d\tau(\vec{x})$延伸出来的朗之万径迹的系综，最终必定以定态概率分布到达整个区域。

（2）定态分布也描述着一条随着时间的推移能够到达$p_{st}(\vec{x})$区域中每个体积元$d\tau(\vec{y})$的朗之

万径迹上所有点的系综。在另一方面，$P_{st}(\vec{x})$的形状不会改变。这两点事实仅在下述情况下才能统一起来：对于一个很长的时间间隔$T\to\infty$时，在每段朗之万径迹上所用的时间与其间隔$d\tau(\vec{y})$中的$P_{st}(\vec{y})d\tau(\vec{y})$成正比。由此得出结论，任一函数$F(\vec{x})$在定态系综中的系综平均值与沿着一条朗之万径迹$x^a(t)$所取的时间平均值是相等的：

$$\langle F(\vec{x})\rangle_{st} = \int_{(x)} F(\vec{x})P_{st}(\vec{x})d\tau(\vec{x})$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(x^a(t))dt \qquad (1.17)$$

运动方程的另一个系综性质的讨论是基于：在方程(1.1)和(1.11)中的函数$F_i(x_1,\cdots,x_n)$一般是非线性的，以及在方程(1.16)中转移概率$w(\vec{y}\leftarrow\vec{x})$是$\{x_k\}$和$\{y_k\}$的函数。这种非线性结构可以作为“自治原理”的一个结果，也就是可以是宏观变量的“原因”和“效果”之间存在着一种循环耦合或反馈。举例来说，一个系统中诸单元可以产生一种共同的场：这个共同场以静态或动力学的方式反作用于各个单元，并且将各个单元的轨道、激励等稳定在确定的时、空有序状态。然后

有序结构和共同场以自洽的方式相互支持相互保证着。

在上面，我们以一定的篇幅简要介绍了在物理、化学系统中主要使用的朗之万方程、平均值方程、主方程和福克一普朗克方程。这几个方程也是协同学中的主要方程，因此在定量社会学中它们仍然起着重要作用。在定量社会学中，目前所用的主要方程与上述方程具有相同的结构，因而在求解方法上有很多借鉴之处。

主方程完全是从随机理论中推导出来的，它是协同学基本方程。其它如朗之万方程、福克一普朗克方程都可在特定条件下通过近似从主方程中得到。但是，直接应用主方程求解的问题往往要求苛刻的条件，因此在实际上人们用近似方程求解的情况倒是经常的。

1-2 社会学中的协同概念

协同学（Synergetics）一词是从希腊文衍变而来的，意思是关于协同作用的科学，即关于系统中各个子系统之间相互协同的科学。协同概念首先使

用在社会科学中，马克思曾经指出，简单的协作也会产生新的生产力。西方经济学也用人与人之间的协同合作产生生产力的论点来描述经济的发展。哈肯教授发现自然科学系统的相变是由于子系统之间的协同合作造成的，因而把协同的概念拓广到自然系统而取名为“协同学”。

其实，了解中国科技史的西方科学家都认为协同概念是中国古代许多科学的指导思想。英国著名科学家李约瑟曾经引用魏莱的话评论说，中国古代哲学家主张阴阳学说的目的，“是企图在人生中获得两者之间完美的和谐”。当代著名的科学家普里戈金也认为，中国传统自然哲学强调的是“关系”，注意研究整体的协调和协作，以期达到一个“自发的有组织的世界”。在我国，“和谐”是一个十分古老的哲学范畴。在古代的自然哲学中就十分重视不同事物之间的协作现象和协同作用，非常强调“天时不如地利，地利不如人和”的观点。据《国语·郑语》中记载，周幽王八年，史伯对郑桓公答问时说：“夫和实生物……以他平他谓之和，故能丰长而物生。……故先王以土与金、木、水、火杂，以成百物。”“和”就是把性质不同的事物结合在一起（“以他平他”），因而能够产生新的事

物。五味配合可以烹调出可口的美餐，五音谐调才能奏出动听的音乐，金、木、水、火、土五种要素互相配合，便产生了世界上的万事万物。东汉的王充提出了“天地合气，万物自生”的元气自然论，明末的王夫之论述了“分一为二”与“合二以一”的观点，等等。这些哲学命题都说明了“协同”的重要性。在这种自然哲学观点指导下建立的中医理论，十分注意阴阳、虚实、寒热之间的对立和协调，以及五行之间的相生相尅，用来解释各种生理病理现象。实际上，人体是一个高度有序的结构，阴阳、寒热、虚实的对立和统一，正反映了人体的各子系统间的相互关系，如果子系统的联系和协调出现紊乱，那么整个系统的正常运行就会出现障碍，人体便会“得病”，药物和治疗的作用实际上是调节各子系统的联系，使子系统间能协调统一的运行，也就是使整体再回到“统一”占主导地位的高度有序状态。因而要使药物的作用发挥得当，就必须恰如其分，否则物极必反。因此中医开药方十分强调要按照“君臣佐使”的原则来配置主药和辅药的分量。中国古代的天文、气象等居当时世界首位的科学也均注重协同的概念。

然而，把协同概念提炼为数学语言，用来定量

研究系统的发展和演化则是近十年来的事。自然科学中首先定量地建立了协同学。由于协同概念和社会经济系统的关系密切，因此在协同学建立的初期，人们就用它来研究社会经济系统了。这种研究大致分为两个阶段：定性研究和定量研究，分别概述如下。

定性研究中的说明

协同学的突出特点是研究系统的相变过程，因此人们就用它来研究社会经济系统中出现的发展和变化，尤其适用于研究变化前后在系统中出现了质的变化的情况。用非平衡理论研究社会经济现象的例子很多。布鲁塞尔学派中有一批人专门探索这方面的问题。用协同理论作定性研究的成果已收入哈肯教授所著的《自然成就的秘密：协同学：合作理论》一书中。其研究的范围涉及到社会政治变革、城市规划、经济布局、交通运输、人口动力学、生态学等等。定性的研究方法简单，容易抓住变革的主要因素进行分析，比如舆论形成问题、农业国转变为工业国问题、充分就业和失业状态的转变问题、宏观经济和微观经济问题等等。作为一种研究社会经

济问题的方法，我们在此仅举一例略加介绍。

西方社会的充分就业和非充分就业问题。我们把充分就业和非充分就业看作两个相，对于这种相变的研究引起了对新发明的研究，因为新发明对经济发展和就业问题有着直接的作用。在经济领域中的新发明有两种：一种是产品新发明，如电话、汽车等；一种是技术新发明，如蒸汽机、内燃机等；它们对社会的许多行业有很大的影响。

在西方社会，发明分为两个阶段，基础阶段和改进阶段。在第一个阶段，生产大幅度增加，达到了充分就业，如在五十年代市场上出现了很多新产品。到了1960年以后进入第二阶段，向生产合理化的方向发展，为了提高利润就要改善、简化生产过程，尽量使用较少的人来生产。因为改善旧产品不需要新产品的投资费，对资本家来说更合适。生产合理化的结果，失业就会增加，又出现了非充分就业。

为了讨论充分就业和非充分就业之间的相变问题，首先引入年平均生产量X_0（用美元作单位计算），实际年生产量用X_0+X来表示，X是与年平均生产量的差额。我们关心的是生产的增长或下降所产生的影响。新产品生产的投资费I可使生产成正比的增长，同时生产合理化投资R也促使生产

的增长RX。但由于产品的饱和以及原料缺乏等因素又反作用于生产使生产下降，这个相互作用的因素是非线性的，一般可用CX^3来表示。这样便得到模型方程

$$\dot{X} = I + RX - CX^3 \qquad (1.18)$$

我们把生产作为量度失业的一个量。上述方程是协同学中的典型方程，即满足$\dot{X} = -\partial V/\partial X$，V是势函数，由此可得到

$$V = -IX - \frac{1}{R}RX^2 + \frac{1}{4}CX^4 \qquad (1.19)$$

我们从它的势函数V的变化情况便可得到一些一般性的结论。

首先，我们假定把全部投资都用到生产合理化上，而不进行新产品的发明投资，这时由（1.19）得到的势函数曲线如图1.8所示，它有两个极小值（两个谷），这就是说在供求之间存在两种平衡，这是物理学家所熟悉的，也是经济学家感到惊奇的事实。这就是说V表示了它们之间的相互作用。通过协同作用，可能出现一种低生产状态或一种高生产状态。若考虑到市场销售和就业的关系，这就出现一个充分就业和非充分就业的问题。

需要考虑的往往是生产新产品和改进原产品的

投资总数，如果总投资作为一个常量，即$I+R=I_0$。当R增加时，势函数曲线如图1.9所示。这时的最小值在左边，即不充分增加新产品投资时就处在一种失业状态。如果充分增加新产品的投资I_0，势函数曲线就变为图1.10所示的情况。对于个别厂商或

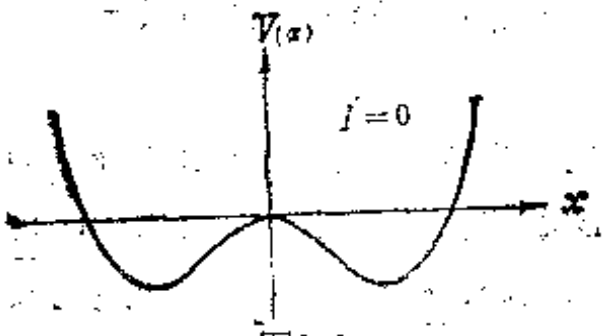


图1.8

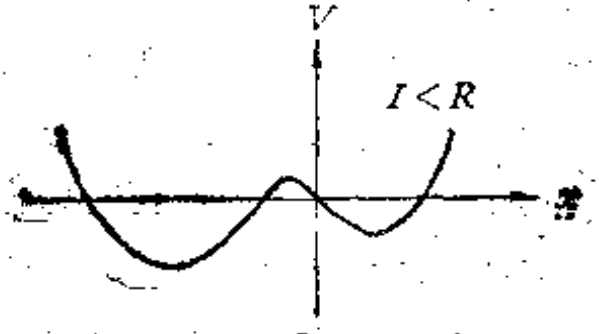


图1.9

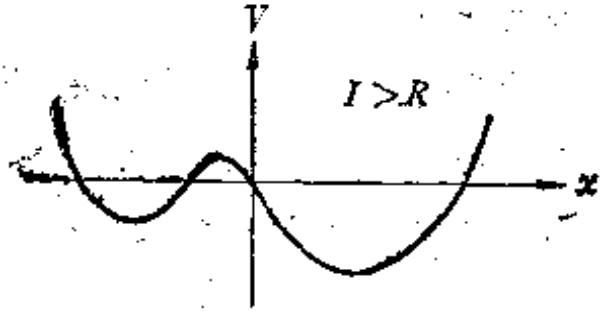


图1.10

公司来说实现从前一种状态到后一种状态的跳跃是不利的。这个转变往往是通过所有厂商的集体转变来实现的，是通过政府对研制新产品的投资来实现这种转变的。

定量社会学中的协同概念

用定量的方法研究社会问题能够准确了解各个参数变化的细节。然而社会问题往往比自然现象复杂得多，因此如何将协同概念确切地定义到社会现象，并且定量地进行计算，这是一个首先要解决的问题。正象在日常生活中"工作"的概念，如果把它定义为力学的"功"并进行计算时，"功"比"工作"的概念确切了，狭义了。同样我们要把自然科学中的概念和方法拓广到社会学中时，决不是照抄照搬，而是必须结合社会学中的实际情况进行深入的分析，否则就只能招致它们仅仅在数学形式上的类似，而这种表面上的类似是难以深入发展的。因此，我们首先要建立具有社会特色、具有新的含义的一些概念。再者必须要检验协同学能够应用到哪些真实的社会现象上。如果搞清楚了自然科学和社会科学间存在的结构对应关系，那么它们之间就不

只是偶然的类似了。

最近几年来，W·韦德里希和G·哈格在研究开放的多分量的物理、化学系统时注意到协同学可以用于定量考查社会系统和社会历史发展的极其广泛的问题。

显然，人类社会是一个由“单位”（即它的成员）组成的多分量系统。因为在社会系统中不仅存在着社会内部各个成员间的思想交换的内部相互作用，而且还通过科学和技术与周围环境进行着能量流、物质流、信息流等多种形式的外部作用，因此社会系统是开放系统是毫无疑义的。

这样看来，把物理、化学系统中的协同概念运用到社会系统是由于存在着下述的普遍联系：

一个物理、化学系统是由大量的单元所组成，每个单元存在于几种可能状态的一种。在微观水平上系统的动力学由单元在可能状态之间的转移所形成。在引入集体变量后系统的整体行为将分别遵从着前面介绍的运动方程。

社会系统也可看作由大量具有不同态度或特征“状态”的成员所组成。由此就可以假定，在社会现象中的因果变化是有关成员态度变化的结果。同样，当引入系统的总变量时便可得到整体的变化特

性，比如关于社会集团的一般态度。

如果在“自然的”和社会的系统之间能够建立形式上的同构，即

1）系统都由相应的单元组成。

2）两种系统在内部的单元状态的转换上相对应。

3）在一个系统中引入的集体变量可以由另一个系统的集体变量单值确定。

那么，在两系统之间——就其动力学变化而论——形式是相同的，并且与系统的组成单元或各部分的性质无关。何况从严格的类比情况来看，社会系统同对应的非社会系统的相近形式之间不只是一种一对一的关系，从直观上来看还可使用本章第一节所讨论的运动方程来描述在状态之间的各种转变所产生的一种总体动力学。第三章就在这种基础上建立了社会过程的形式理论。

在另一方面，同物理、化学系统比较起来，人类社会的“单元”和“相互作用”不是一种简单的而是具有高度复杂的本性。在许多情况下人的思想、情绪和意图都反映了自己复杂的脑结构所表现出来的复杂性。再者，随着客观条件的变化，各个成员之间的相互作用形式也在变化，相互作用可以采取

活化的和公开的形式，也可以采取未活化的和隐蔽的形式。社会系统和自然系统的另一个基本差别是，在物理、化学系统中的相互作用引起了一种无意识的“盲目的”自组织，而社会学中的相互作用的性质引起的是（至少在局部）一种明智的“有计划”的结构。

为了得到一种实用而又足够简单的定量理论，就不能讨论涉及人的个性及其相当复杂的相互作用的社会现象，而只能讨论易于了解而广泛存在的“微观理论”。

下面的两个社会现象不是本书或是本书开拓后所能解决的问题：

1）结合在一起的股东的特性，在这种情况下的个人抉择是活化了的高度复杂的心理状态，由于股东数小，从系综角度讨论并没有意义，不能用统计方法得出各个股东的抉择，现在离解决这种头脑复杂活动的理论还很远。

2）“规范经济学”，即在经济学和其它用到管理的领域中，在边缘股份的范围内为既定的目的有智力有意识用最佳方案创造出优良的组织结构。这样的科学问题可以用数学解决，比如对策论。

仅从理论被实现和对实际社会过程的影响效果

而论，经济决策的问题属于本书讨论的范围。现在具体讨论一下定量方法所能讨论的重要社会现象。我们所讨论的现象是，在“微观水平”上各个人的社会政治心理学及其在社会宏观水平上产生集体的物质、经济及其抽象结构的社会过程。

我们所讨论的现象是——个人水平上的——合理计入涨落、专业活动、情绪嗜好的一种复杂混合物，并溶汇为已划分的几种合成态度中的一种。这些态度（下文以“维”表示）或许是宗教、政治、教育、居住、职业、经济、准则、消费习惯、家庭、体育运动等。某种“态度”可以找到一种表示方式，如宗教信仰、对某个政党或某种进款项目发表意见。

同样波动着的思想、感情和感受也常常最后引起从一种态度转变为另一种态度。再者，迄今没有明朗化的态度也会在社会过程中得到发展；因此，可能的态度是多支路的。在第三章用“态度空间”来描写这种多支路的现象。

在从各种个体微观水平到社会宏观水平的作用变换中，还要引入“社会构形”的概念。社会构形描述了一个在社会各个局部人口上的态度分布，并且可看作这个社会的一组适当的宏观变量的集合。

本书中介绍了“相互作用人口动力学”，这个理论当然与社会构形的结构发展有关系，并且以此得到了定量的结果。这种定量理论是建立在统计物理和社会学间在形式上存在的结构类似性上的。但是，这种类似性根本不在于物理和社会系统之间的单元、相互作用及变量的直接类似，而是一般的随机定律支配着各种各样多分量系统的统计行为。

在社会学中，在各种决策上出现的理性的和偏激的、有意识的和潜意识的、遗传的和环境影响的复杂相互关系的“微观”细节是不知道的。由方程（1.13,16）所描述的物理系统看到，当不知道系统的微观影响的细节时，完全可以通过宏观变量运动的概率来描述。因而，也可以证明在社会学中能够用决策和运动过程的概率进行描述。在第三章就要引入诸如局域人口从一种态度到另一种态度的转移概率等重要概念。将通过自然科学系统的方程（1.16）的结构类似而得到这种概念的社会构形的运动方程。

我们在前面已经叙述了，物理学中的这类方程往往是从第一原理导出的。然而在社会学中必须求助于能建立合理的可灵活选择的社会构形和转移概率的唯象方法。正象预料的那样，一定要从政治学

和经济学的角度出发研究经济和政治心理状态的两种变量。在下一章讨论模型的时候，如何取这些变量就具体化了。

也只是在这一点上才能给出社会定量描述的一些一般结果，关于这一点在没有使用数学工具之前就可以得到定性的和直观的认识和说明。

正如物理学中那样，非线性的方程形式表示了社会系统中一种自洽结构。这就是说可以用如下说法描述社会系统中在原因和效果之间存在的一种循环耦合。

社会中的各个成员通过他们的文化、经济活动共同产生了标志社会文明的具有文化、政治、宗教、社会、经济多分量的集体"场"。这种合作产生的场决定着社会政治空气和经济文化的水准，它可以作为现实社会的序参量。反过来说，合作场又反作用于各个成员，通过修正成员的活动，通过激发或限制成员中隐藏的积极的和消极的因素和能力，通过开拓或限制成员的思考和活动范围等手段，强烈地影响和左右着社会的成员。

在原因和效果之间的这种循环耦合过程，是相互促进加速发展进程的，一直达到自饱和状态为止。在"正常情况"下，社会成员与其合作场的反

馈作用结果会维持一个准稳定的或发展着的相，即一个社会的“自洽”聚集结构。在这种情况下可以预言以后的发展，因为相互作用的有关宏观变量的空间（计入社会政治和经济状况）是已知的，并且这些宏观变量遵守着一种准封闭的子动力学方程。

但是，由于内部或外部的相互作用使操纵着系统动力学性质的控制参量达到某一临界值时，在临界区域内宏观变量容易分岔进入另一径迹。在临界区域中小的不可预料的微观涨落——比如几个有影响人的作用——决定着社会特性的分岔以及进入哪一条分岔。伴随着发生在分岔点上的激励往往引出未知的新的序参量。例如，一种新的意识形态或新的科学发现就可对这种分岔产生决定性的影响。为了模拟这种出现新宏观变量的动力学过程就必须在态度空间和社会构形中加上代表新变量的一个维数。这种描述框架开拓的本身就意味着原来的宏观变量不再满足和不再遵守一种封闭的子动力学了；对于原来的宏观变量集合来说已经不能进行预言了。

物理学中把这种分岔过程叫做相变。在社会学中这种分岔过程就相当于革命局势，例如一批坚定的革命者可以触发起一次革命，也就是突然转变了

社会整体的“相”。在某种意义上来说，从一个相到另一个相的转变表现出的自治结构是模棱两可的，以至在相同的外部条件下可能存在几种稳定的或不稳定的状态。

现在介绍一个革命局势引起分岔过程的例子：如果存在两种激烈对抗的意识形态，比如有a和b两种，各自力图在社会成员中排除另一种意识形态的影响而获胜，因此a和b的共存均势是不稳定的。一旦一种意识形态有一个小的初始优势，它将竭力扩展影响增加追随者的数目，比如采取精神或经济压力直至变为绝对优势。因此，在这里发生了从两种意识的均势共存转变为一种意识形态稳定局势的分岔过程。在第二章将通过一个简单的定量模型来描述公共舆论的形成和转变过程。

1-3 定量社会学的意义和局限

在这一节中，我们讨论定量社会学与传统的社会学、政治科学间的认识论及其运用范围的关系问题。

当一种科学从定性讨论到定量计算的时候，总是要开创出新的思路和论证范围。社会科学也是这

样。但自然科学和社会科学在成分和组织结构上的本质不同，必然得出各自不同的特殊结果。由于社会历史的复杂性，要把各种复杂问题都准确的定量化描述并不是成功的方法，即使在数学计算上得到了成功，但就真实社会的发展而论也可能意味着对数学的滥用。

W·韦德里希和G·哈格在建立定量社会学时采取了严肃的观点，他们既不高估也不低估数学在社会学中的地位和作用。正如在以后各章中将要详细看到的那样，正是在这样的框架中导出了适应于许多原来定性概念的定量公式——“社会构形的运动方程”。例如，通过影响社会构形动力学行为的转移概率和心理、政治、经济能力的趋势参量把态度及其灵活性定量化。要将政治趋向定量化就要进行严密的定义，这样在它原来的定性含意中又加上了许多限制。例如定性概念“适应性”描述了个体的一组复杂的机能，而描述“适应性”的定量参数仅是社会构形运动方程中的平均效应。

在定量化的过程中也增加了概念的精确度，正如牛顿把生活语言中的“力”一词变为定量概念时也加了许多附加的限制条件。

总之，要使数学能够有意义的运用到社会科学

中，就必须从一开始就考虑到各种社会系统的复杂结构。一般说来，这就要求社会过程的数学模型也能在微观水平上给出实际过程的正确的确切的描述。反之，为了研究社会的假想状态，就要通过模型的理论变量可能形成的运行值的整体动力学的趋势和效果的认识值来了解。虽然真实的社会比模型还要复杂，但只要模型的主要性质符合于社会的真实性，就会找到模型的认识值和运行值。幸而可以证明，我们的许多模型对各种波动来说具有结构上的稳定性。再者，同物理、化学系统比较起来，社会系统的协同学强调了动力学系统的结构和整体的变化，而不在于更细致的研究各个模型。从这个意义上讲，最好把这本书称为半定量的社会学理论。

如果找到了自然科学和社会科学之间的类似性，而且还阐明了它们之间的差别，那么就可以验证所提出概念的内在有效性。因为在自然科学中对已知的一组宏观变量的封闭子动力学可以预言系统的空、时变化，而传统的社会、政治和历史科学的预言能力是很低的，况且有时调查研究所带来的片面性往往又限制了对后来发展分析的正确性。

根据概念所存在的环境和条件，与物理、化学系统相比，社会系统具有更高的分岔和相变的频

率。举例来说，在社会系统中会出现意想不到的宏观变量的增长或下落，而这在物理、化学系统中则是很罕见的事件。因此，在社会学中从初始状态的邻域开始的径迹会分岔进入根本不同的另一种状态。从由明显的峰值分布的初始状态出发，其概率分布会发展成宽广排布的多模情态。所以一般来说，从已知的一组宏观变量出发对系统下一步情态的可预言性在物理学中很高，而在社会学中却很低。

从这个观点出发，正统的社会科学在理论上的缺陷就变得显而易见了。在定量社会学中用总体变量来描述社会的发展，因而它必然是概率的。由于社会过程是非线性的，因此可以料到在这个理论中一定会出现分岔和相变。在分岔过程中伴随出现的临界涨落使宏观变量未来径迹的单值预言变为不可能的了。这样的一种结构理论与精确的历史确定论是不相容的！然而，由历史径迹的限制性假定决定了社会的偏离和分岔最终会渐近地走上共产主义社会，决不容许存在直观上不同的数学争论。

在半定量社会学中，另一种重要方式可以在对各种社会结构所作的客观的“中立”的明确分类上取得进展，一方面是道德标准，另一方面是对实际

思想意识内容的评判。

在定量理论中，客观地描述组织结构及其信仰的传播往往具有不可分割的关系。相比之下，半定量理论通过它的定量的宏观变量的子动力学的结构效应只能得出它的功能作用。

举例来说，共同的排外思想与必然产生的对抗情绪和容忍度的关系，可以通过在社会中某种定量化的态度和事件的结构得到比较明确的结果。在半定量模型中只可以在客观的（或无根据的）基础上识别和验证这种思想意识的稳定结构与其动力学的关系。

在弄清了客观结构与其道德准绳的关系之后，当然可以通过适当的途径作出判别道德的标准，例如去区分所希望的或不希望的发展。

由前面的讨论可知，主要障碍之一被半定量理论克服了，但遗憾的是这些评判标准与观察者有关；这就会造成定量社会学将歪曲人的态度以至滥用得到的后果。例如，由单方面的态度去选择宏观变量和模型，然后应用动力学得出自认为是“客观的”决策，还会引起进一步争论——因为定量社会学的定量终究要限制各个自由度的范围。

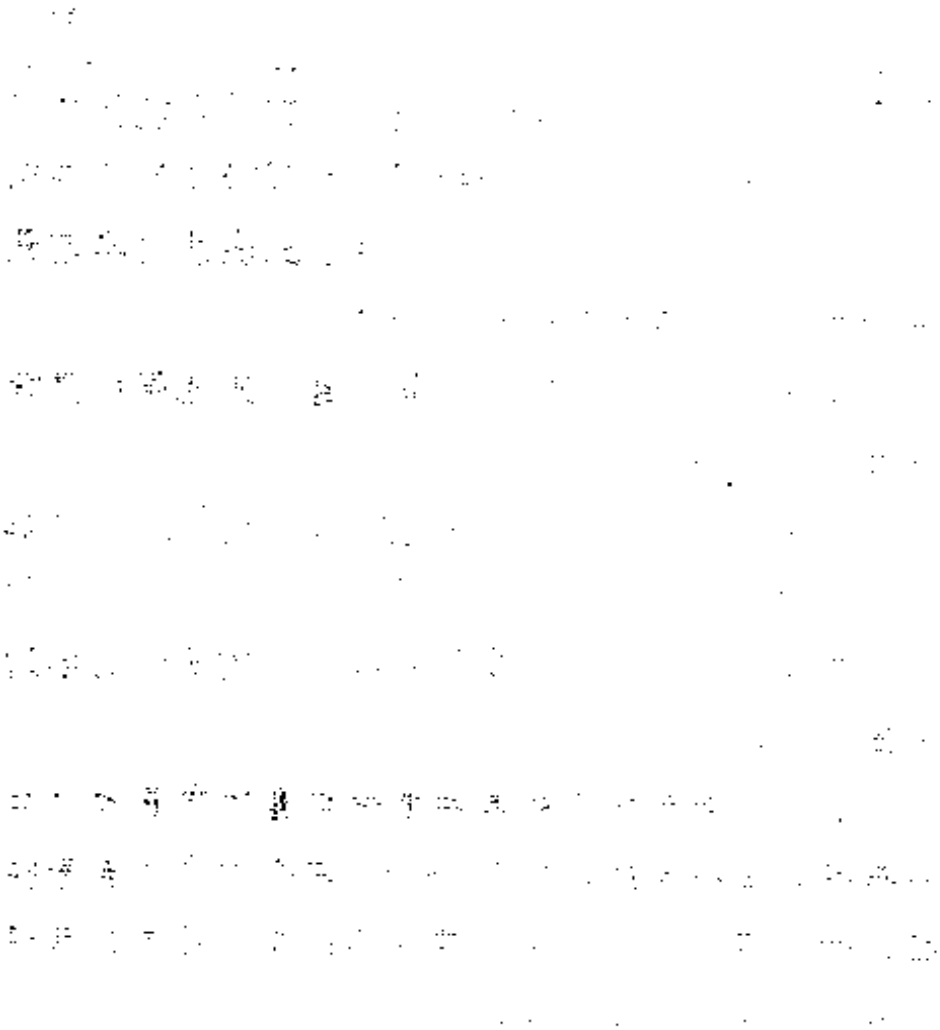
这种争论是严肃认真的，而且必然会看到对社

会思想所采用形式的类似争论：所有社会或历史理论的共同特点——在分析社会过程时使用了正和负。但是，似乎看来只要小心用公式表达的半定量理论对滥用会具有内在的免疫力：

首先，总可以自行在定量变量及其道德和情绪估值的动力学之间进行选择。

其次，在半定量模型中宏观变量的选择并非直接选定的，只能在所研究社会内容的有关性质的一组宏观变量能导出与实际结构一致的子动力学时才算选定。

第三，幸而社会的某种集体变量的定量动力学是描述集体行为的，它不限制某个成员的自身抉择。这个理论只能表述对感兴趣的各个成员的思想和相互作用的集体总合。



第二章

定量化的探索

——舆论的形成

中国有句古话："山雨欲来风满楼"，意思是说任何事物的出现都是有先兆的。如果把社会运动比作山雨的话，那么社会舆论就是山雨欲来时的风。舆论是社会运动的信息，是人心向背的具体表现。因此舆论的形成和演变是社会学研究的基本问题之一。在协同学中，伊辛模型曾定性地描述了舆论的形成和演变，并且得到了令人满意的结果。在这一章中，我们通过舆论形成的定量化探讨，试图找到一般社会运动定量化的普遍规律。之所以能通过这个例子得到如此普遍的结果，是因为：

（1）定量社会学中所用到的方程（主方程、福克一普朗克方程、朗之万方程和平均值方程）实质上是自洽的。因此可以把舆论的形成作为例子来讨论这些方程及其重要性质。

（2）这些方程可以以精确的形式或以（很好）近似的形式运用于各种各样的社会过程。

（3）可通过最简单形式的临界涨落来说明相变和分岔的重要过程。

（4）这个模型在模拟实际过程时是稳定的。因此它很适于以半定量方式表述某些政治过程。

2-1 模　型

我们首先建立一个简单的政治态度的模型。假定只有代表两个政党或两种意识形态的政治意见1和2，假定持相同意见的人其个人的特征概率（即对相互影响的响应）是相同的。如果在某时刻具有意见1的人数是 n_1，具有意见2的人数是 n_2，则它们的社会构形表示为 $\{n_1, n_2\}$。如果总人数 $2N$ 是个常数，那么在社会构形中只有一个独立变量 n，即：

$$\left.\begin{aligned} &n_1+n_2=2N \qquad n_1-n_2=2n \\ &n_1=N+n \qquad n_2=N-n \\ &\text{其中 } -N\leqslant n\leqslant N,\ 0\leqslant n_1,n_2\leqslant 2N \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

变量n反映了舆论形成的动力学过程，因此可

以认为各个人意见的转移（即从一种意见变为另一种意见）概率是变量n所定义的社会构形的函数。这样一来就可把单位时间单个人的转移概率表示为

$$\left.\begin{array}{ll} p_{21}(n) & \text{（从1到2的转变）} \\ p_{12}(n) & \text{（从2到1的转变）} \end{array}\right\} \qquad (2.2)$$

至于它的具体形式将在本章§4中讨论，在下两节先讨论它的普遍形式的数学结构。

2-2 运动方程

我们首先对一个社会集合（统计人口）数为2N的社会构形的概率分布下个定义。用函数

$$p[n_1, n_2; t] \equiv p(n; t) \qquad (2.3)$$

表示在时刻t社会构形为$\{n_1, n_2\}$的概率。当然，在所有时间里都应该满足归一化条件：

$$\sum_{n=-N}^{N} p(n; t) = 1 \qquad (2.4)$$

$p(n;t)$的主方程

实际上，$p(n;t)$的运动方程就是在引论中讨

论过的主方程

$$\frac{dp(i;t)}{dt} = \sum_j [w(i \leftarrow j)p(j;t) - w(j \leftarrow i)p(i;t)] \qquad (2.5)$$

的一种特殊情况。方程中的P(i;t)表示在时刻t系统处于状态i的概率，$w(i \leftarrow j)$是在单位时间内从状态j到状态i的转移概率。方程（2.5）式右边的第一项是从其它一切状态j到状态i的概率流，而第二项是从状态i到其它一切状态j的概率流。方程(2.5)可以看作是方程（2.4）的推广。即归一化条件：

$$\sum_i p(i;t) = 1$$

在满足守恒定律的基础上总是成立的，而从方程（2.5）便可得到守恒方程：

$$\frac{d}{dt}\sum_i p(i;t) = \sum_{i,j} [w(i \leftarrow j)p(j;t) - w(j \leftarrow i)p(i;t)] \equiv 0 \qquad (2.7)$$

在（2.2）的各个转移概率中，我们先讨论在“最邻近”社会构形$\{n_1, n_2\}$间的转移。从舆论2的n_2个人中有一个人转移到舆论1时，转移表示为：

$\{n_1, n_2\} \longrightarrow \{n_1+1, n_2-1\}$（或表示为

$n\to(n+1)$）。

同样，转移

$$\{n_1,n_2\}\to\{n_1-1,n_2+1\}\text{（或}n\to(n-1)\text{）}$$

表示从舆论1的n_1个人中有一个人转移到了舆论2。

这样一来，我们就可以把整个社会构形的转移概率表示为：

$$\left.\begin{aligned}\omega((n+1)\leftarrow n)&\equiv\omega\uparrow(n)=n_2P_{12}(n)\\&=(N-n)P_{12}(n)\\\omega((n-1)\leftarrow n)&\equiv\omega\downarrow(n)=n_1P_{21}(n)\\&=(N+n)P_{21}(n)\\\omega(n'\leftarrow n)&=0\quad\text{当}n'\neq n\pm1\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

也可将上式推广到有m个人同时改变意见的转移：

$$\{n_1,n_2\}\to\{n_1\pm m,n_2\mp m\}$$

的情形。我们将在第四章中讨论在多转移情况下如何求解主方程的问题。由方程（2.5）和（2.8）可知，概率$P(n;t)$的主方程是：

$$\begin{aligned}\frac{dp(n;t)}{dt}&=[\omega\downarrow(n+1)P(n+1;t)-\omega\downarrow(n)p(n;t)]\\&\quad+[\omega\uparrow(n-1)P(n-1;t)-\omega\uparrow(n)p(n;t)]\end{aligned}\tag{2.9}$$

引入从“状态”n到$(n+1)$和$(n-1)$的概率流：

$$\left.\begin{aligned} j\uparrow(n;t) &= w\uparrow(n)p(n;t) \\ j\downarrow(n;t) &= w\downarrow(n)p(n;t) \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

而状态n和(n+1)间的净概率流是：

$$k(n;t) = j\uparrow(n;t) - j\downarrow(n+1;t) \qquad (2.11)$$

假定主方程的连续性形式是：

$$\frac{dp(n;t)}{dt} = [k(n-1;t) - k(n;t)]$$

$$\equiv -\Delta K(n;t) \qquad (2.12)$$

在(2.8, 10, 11)三式中的流遵守边界条件：

$$\left.\begin{aligned} j\uparrow(N;t) &= j\downarrow(-N;t) = 0 \\ k(N;t) &= k(-N-1;t) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

最终可将主方程(2.5)，尤其是(2.9)表示为矩阵形式：

$$d|\vec{p}(t)\rangle/dt = \mathcal{L}|\vec{p}(t)\rangle \qquad (2.14)$$

其中$|\vec{P}(t)\rangle$是一个分量为P(i;t)的矢量

$$|\vec{p}(t)\rangle \equiv \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p(i;t) & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

$\mathcal{L}$的矩阵元为L_{ij}

$$\mathcal{L} = ((L_{ij}))$$

$$\text{其中} \quad L_{ij} = \omega(i \leftarrow j) - \delta_{ij} \sum_{k} \omega(k \leftarrow i) \qquad (2.16)$$

在方程（2.9）中，矢量$|\vec{P}(t)\rangle$有（2N+1）个分量

$$|\vec{p}(t)\rangle=\begin{Bmatrix} p(-N;\ t) \\ \cdots\cdots \\ p(n;\ t) \\ \cdots\cdots \\ p(N;\ t) \end{Bmatrix} \qquad (2.17)$$

而且矩阵$\mathcal{L}$可以表示为：

$$\mathcal{L}=((L_{n,n'}))$$

其中，

$$\left.\begin{aligned} &L_{n,n}=-(\omega\uparrow(n)+\omega\downarrow(n)) \\ &L_{n,n-1}=\omega\uparrow(n-1) \\ &L_{n,n+1}=\omega\downarrow(n+1) \\ &L_{n,n'}=0 \quad \text{当} n'\notin\{n-1,n,n+1\}\text{时} \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

P（x；t）的福克—普朗克方程

我们可以把用整数n所代表的社会构形的精确方程化为一种连续变量的近似方程。当社会构形中的n_1、n_2和N很大时，就可以很好地将$p(n;\ t)$、$\omega\uparrow(n)$和$\omega\downarrow(n)$看作n的近似的合理的连续函数。在下面还可以把它们当作变量n的可微函数。

我们首先把主方程(2.9)展开为泰勒级数并取至二阶项：

$$\frac{\partial p(n;\ t)}{\partial t}=\Delta n\frac{\partial}{\partial n}\left[\omega\downarrow(n)p(n;\ t)\right]$$

$$+\frac{(\Delta n)^2}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left[\omega\downarrow(n)\,p(n;\ t)\right]$$

$$-\Delta n\,\frac{\partial}{\partial n}\left[\omega\uparrow(n)\,p(n;\ t)\right]$$

$$+\frac{(\Delta n)^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left[\omega\uparrow(n)\,p(n;\ t)\right]$$

(2.19a)

令$\Delta n=1$，便得到：

$$\frac{\partial p(n;\ t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial n}\left\{\left[\omega\uparrow(n)-\omega\downarrow(n)\right]p(n;\ t)\right\}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left\{\left[\omega\uparrow(n)+\omega\downarrow(n)\right]p(n;\ t)\right\}$$

(2.19b)

再引入变量：

$$x=\frac{n}{N},\qquad \Delta x=\frac{\Delta n}{N}=\frac{1}{N}\equiv\varepsilon \qquad (2.20)$$

因此 $-1\leqslant x\leqslant+1$

引入对应的概率分布函数：

$$P(x;\ t)=Np(n;\ t)=Np(Nx;\ t) \qquad (2.21)$$

并满足归一化条件：

$$\int_{-1}^{1}P(x;\ t)dx\doteq\sum_{x=-1}^{+1}P(x;\ t)$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} p(n;\ t) = 1 \qquad (2.22)$$

分布P（x；t）的“漂移因子”定义为：

$$K(x) = W\uparrow(x) - W\downarrow(x) \qquad (2.23)$$

“涨落因子”定义为：

$$Q(x) = W\uparrow(x) + W\downarrow(x) \qquad (2.24)$$

此后，将$\omega\uparrow(n)$和$\omega\downarrow(n)$取作为如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\omega\uparrow(n) &= N(1-x)P_{i,2}(Nx) = NW\uparrow(x)\\ \omega\downarrow(n) &= N(1+x)P_{2,i}(Nx) = NW\downarrow(x)\end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

将（2.20），（2.21），（2.23），（2.24），（2.25）代入方程（2.19b），便得到一维福克—普朗克方程的标准形式

$$\frac{\partial P(x;\ t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big[K(x)P(x;\ t)\Big] + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[Q(x)P(x;\ t)\Big] \qquad (2.26)$$

也可以写成连续性方程形式：

$$\frac{\partial P(x;\ t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}I(x;\ t) \qquad (2.27)$$

引入概率流

$$I(x;\ t)=K(x)P(x;\ t)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x)P(x;t)\right] \qquad (2.28)$$

这个与（2.13）所对应的概率流必须满足边界条件：

$$I(-1;\ t)=I(+1;\ t)=0 \qquad (2.29)$$

现在可以分析因子K(x)和Q(x)的含义了。如果初始时刻t = 0时，在x_0具有δ-函数的分布形式：

$$P(x;\ 0)=\delta(x-x_0) \qquad (2.30)$$

并将P(x; t)在时间间隔Δt中的变化率定义为P(x; t)对时间（t = 0时）的微商：

$$\frac{\partial P(x;\ 0)}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(x;\ \Delta t)-P(x;\ 0)}{\Delta t} \qquad (2.31)$$

函数f(x)在时刻t的平均值表示为：

$$\langle f(x)\rangle_t=\int_{-1}^{+1}P(x;\ t)f(x)dx \qquad (2.32)$$

将（2.31）代入（2.26）的左边，然后取它的一阶矩和二阶矩，这样就可以计算x和x^2的平均值在短时间内的变化了。

由一阶矩得到：

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial P(x;\ 0)}{\partial t}\ xdx = \lim_{\Delta t \to 0}$$

$$\frac{\langle x\rangle_{\Delta t} - \langle x\rangle_0}{\Delta t} = \int_{-1}^{+1} x \left\{ - \frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \right.\right.$$

$$\left.\left. P(x;\ 0) \right] + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[Q(x) P(x;0) \right] \right\} dx$$

$$= K(x_0) \qquad (2.33a)$$

在最后一步利用了分部积分法和(2.30)式。因为：

$$\langle x\rangle_0 = \int \delta(x - x_0) x dx = x_0$$

$$= \int P(x;\ \Delta t)\ x_0 dx = \langle x_0\rangle_{\Delta t}$$

其结果亦可写为：

$$K(x_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle (x - x_0)\rangle_{\Delta t}}{\Delta t} \qquad (2.33b)$$

同样可由（2.26）—（2.32）计算

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial P(x;\ 0)}{\partial t}\ x^2 dx = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle x^2\rangle_{\Delta t} - \langle x^2\rangle_0}{\Delta t}$$

$$= \int_{-1}^{+1} x^2 \left\{ - \frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) P(x;\ 0) \right] + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \right.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[Q(x)P(x;\ 0)\Big]\Big\}dx$$

$$= 2x_0K(x_0) + \varepsilon Q(x_0) \qquad (2.34a)$$

用(2.33b)和

$$x_0^2 = \langle x^2\rangle_0 = \langle x_0^2\rangle_{\Delta t}$$

就可导出：

$$\varepsilon Q(x_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\langle x^2\rangle_{\Delta t} - 2x_0\langle x\rangle_{\Delta t} + x_0^2]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle (x-x_0)^2\rangle_{\Delta t}}{\Delta t} \qquad (2.34b)$$

方程（2.33b）和（2.34b）说明，假若从具有高峰的（2.30）的初始分布开始运动，$K(x_0)$和$Q(x_0)$就等于在时间间隔 Δt 中x的平均差和均方差除以 Δt。在第三章将把这个结果推广到多维的情况。

x(t)的朗之万方程

上面用了系综观点的研究方法，同样也可用一个取样社会的n(t)或x(t)的径迹进行研究。十分明显，因为n(t)的增加或减少只能是整数，所以n(t)和x(t)是涨落量。但当n很大时，n(t)和x(t)的整体运动便呈现为在平均运动上迭加了一个很小的随机偏差涨落。这种形式的运动可以用朗之万方程进

行描述。在第三章将要论证福克—普朗克方程和朗之万方程的一致性。在下面先讨论一维出现偏差时的情况。

描述x(t)运动的朗之万方程的普遍形式是：

$$\frac{dx(t)}{dt} = k(x) + q(x)\xi(t) \tag{2.35}$$

这里的k(x)和q(x)已知，并假定ξ(t)为“高斯δ关联的随机力”，即假定它们的关联函数是：

$$\left.\begin{aligned} &\langle \xi(t) \rangle = 0 \\ &\langle \xi(t+\tau)\xi(t) \rangle = \delta(\tau) \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

高阶的关联函数亦可唯一地表示为这种关联函数的积。这里的平均〈 〉是对通过取样社会中成员随机转移所引起的各种可能的随机力ξ来取平均。方程（2.35）右边的随机力的随机本质使x(t)表现为非确定的随机径迹：即使从相同的初始值开始，在方程（2.35）中的随机力的作用下也会出现x(t)的不同径迹。但是，在离开初始值的短时间间隔Δt时的x(t)的平均差和均方差，是通过由初始条件$x(0)=x_0$反复积分（2.35）后取平均值〈 〉计算的。利用这种计算（详见第三章）得到以下结果：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle [x(\Delta t) - x_0] \rangle}{\Delta t} = k(x_0) + \frac{1}{2} q(x_0)$$

$$\frac{\partial q(x_0)}{\partial x_0} \qquad (2.37)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle [x(\Delta t) - x_0]^2 \rangle}{\Delta t} = q^2(x_0) \qquad (2.38)$$

这个结果应当与（2.33b），（2.34b）进行比较，在这里 x 的短时间内的平均差和均方差(除以Δt)是由p(x; t)的福克—普朗克方程来计算的，结果表明它们分别与福克—普朗克方程中的漂移因子和涨落因子相一致。不仅（2.34b）和（2.38）的右边是一致的，而且（2.33b）和（2.37）的右边也是一致的，在福克—普朗克方程（2.26）和朗之万方程（2.35）中的因子间存在如下关系：

$$q(x) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}(x) \qquad (2.39)$$

$$k(x) = K(x) - \frac{1}{2} q(x) \frac{\partial q(x)}{\partial x} = K(x) - \frac{\varepsilon}{4} \frac{\partial Q(x)}{\partial x} \qquad (2.40)$$

它奠定了在社会描述中使用的福克—普朗克方程和朗之万方程之间的等效性。

平均值方程

正如在引论中所讨论的那样，平均值几乎总是

原方程的解（除了分岔点外），这些解描述了有关变量平均值的径迹。很容易通过（2.32）的定义从福克—普朗克方程导出$\langle x\rangle_t$和$\langle x^2\rangle_t$所遵守的方程。用x和x^2分别乘（2.26），经过在间隔〔-1，1〕进行分部积分后，利用边界条件（2.29）便可导出具体的方程：

$$\frac{d\langle x\rangle_t}{dt}=\langle K(x)\rangle_t-\frac{\varepsilon}{2}\Big[Q(x)P(x;\ t)\Big]_{x=-1}^{x=1} \tag{2.41}$$

以及：

$$\frac{d\langle x^2\rangle_t}{dt}=2\langle xK(x)\rangle_t+\varepsilon\langle Q(x)\rangle_t - \varepsilon\big[xQ(x)P(x;\ t)\big]_{x=-1}^{x=1} \tag{2.42}$$

这样，便可方便地引入偏差：

$$\sigma(t)=\langle(x-\langle x\rangle_t)^2\rangle_t=\langle x^2\rangle_t-\langle x\rangle_t^2\geqslant 0 \tag{2.43}$$

再者，在平均值方程中可以忽略边界的贡献，因为一般说来在$x=\pm 1$所得到的$P(x;\ t)$的值很小。因此，可将（2.41），（2.42）方程写成如下形式：

$$\frac{d\langle x\rangle_t}{dt}=\langle K(x)\rangle_t \tag{2.44}$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = 2[\langle xK(x)\rangle_t - \langle x\rangle_t\langle K(x)\rangle_t] + \varepsilon\langle Q(x)\rangle_t \tag{2.45}$$

但是，除了当K(x)是x的线性函数而且Q是一个常数的简单情况之外，（2.44），（2.45）的$\langle x\rangle_t$和$\sigma(t)$并不接近。对这种简单情况也可用在本章§3·2节的方法求解方程（2.26）。

一般来说，$\langle x\rangle_t$和$\sigma(t)$的方程可看作是近似接近的，只要证明概率分布P(x；t)只有一个峰值，这样，就可将K(x)在$\langle x\rangle_t$附近展开为泰勒级数：

$$K(x) = K(\langle x\rangle_t) + K'(\langle x\rangle_t)(x - \langle x\rangle_t) + \frac{1}{2}K''(\langle x\rangle_t)(x - \langle x\rangle_t)^2 + \cdots \tag{2.46}$$

将这个级数（忽略较高阶项后）代入（2.44）、（2.45）右边的期望值。由于$\varepsilon Q(x)$与$\varepsilon = \frac{1}{N} \ll 1$成正比，因此只需保留$\varepsilon\langle Q(x)\rangle_t$的一阶项。使用：

$$\left.\begin{aligned}\langle xK(x)\rangle_t &= \langle x\rangle_t K(\langle x\rangle_t) + K'(\langle x\rangle_t)\sigma(t) + \cdots\\ \langle K(x)\rangle_t &= K(\langle x\rangle_t) + \frac{1}{2}K''(\langle x\rangle_t)\sigma(t) + \cdots\\ \varepsilon\langle Q(x)\rangle_t &= \varepsilon Q(\langle x\rangle_t) + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

得到的结果是接近的，而$\langle x\rangle_t$和$\sigma(t)$的近似方程

是：

$$\frac{d\langle x\rangle_t}{dt} = K(\langle x\rangle_t) \qquad (2.48)$$

和

$$\frac{d\sigma(t)}{dx} = \varepsilon Q(\langle x\rangle_t) + 2K'(\langle x\rangle_t)\sigma(t) \qquad (2.49)$$

在（2.48）中也忽略了$\frac{1}{2}K''(\langle x\rangle_t)\sigma(t)$项，因为（2.48）和（2.49）只用到漂移运动过程，这里$\sigma(t)$具有$\varepsilon Q(\langle x\rangle_t)$的数量级，其中：

$$|K(\langle x\rangle_t)| \gg \frac{1}{2}\cdot|K''(\langle x\rangle_t)\sigma(t)| \qquad (2.50)$$

对求解不感兴趣而要了解模型具体公式的读者，可以不看本章§3 而接着看§4和§5。

2-3 运动方程的解

现在推导主方程、福克—普朗克方程和平均值方程的定态解和含时解。

定 态 解

我们用（2.12）形式的主方程来讨论它的定态解，即令方程的时间微商为零：

$$\frac{dp_{st}(n)}{dt}=0=[k_{st}(n-1)-k_{st}(n)] \qquad (2.51)$$

当 $-N\leqslant n\leqslant N$

考虑到边界条件（2.13）便可断定从 $n=-N$ 开始的（2.51）的递推解是：

$$k_{st}(n)=0 \quad 当 \quad -N\leqslant n\leqslant N \qquad (2.52)$$

将其代入（2.11）及（2.10）

$$\omega\downarrow(n+1)p_{st}(n+1)=\omega\uparrow(n)p_{st}(n) \qquad (2.53)$$

其中$p_{st}(n)$是稳定概率，$k_{st}(n)$为稳定的净流。通过递推求解方程（2.53）便得到了主方程的精确定态解：

$$p_{st}(n)=p_{st}(-N)\prod_{\nu=-N+1}^{n}\frac{\omega\uparrow(\nu-1)}{\omega\downarrow(\nu)}$$

当 $(-N+1)\leqslant n\leqslant N$ $\qquad (2.54)$

同样，从$n=0$开始递推便得：

$$\left.\begin{aligned} p_{st}(n) &= p_{st}(0)\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\omega\uparrow(\nu-1)}{\omega\downarrow(\nu)} \\ & 1\leqslant n\leqslant N \\ p_{st}(n) &= p_{st}(0)\prod_{\nu=-1}^{n}\frac{\omega\downarrow(\nu+1)}{\omega\uparrow(\nu)} \\ & -N\leqslant n\leqslant -1 \end{aligned}\right\} \qquad (2.55)$$

在（2.54）和（2.55）中的$p_{st}(-N)$和$p_{st}(0)$的值必须由归一化条件

$$\sum_{\nu=-N}^{N} p_{st}(\nu)=1 \qquad (2.56)$$

确定。也可以确定与主方程精确定态解（2.54）或（2.55）对应的福克—普朗克方程的定态解$P_{st}(x)$。

从（2.27）出发，考虑到定态时的边界条件（2.29），即当：

$$\frac{\partial P_{st}(x)}{\partial t}=0=-\frac{\partial}{\partial x}I_{st}(x) \qquad (2.57)$$

得到：

$$I_{st}(x)=\text{Const}=I_{st}(\pm 1)=0 \qquad (2.58)$$

其中，$I_{st}(x)$是稳定概率流。将（2.28）代入（2.58），便得到$P_{st}(x)$的一阶微分方程：

$$\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x)P_{st}(x)\right]=K(x)P_{st}(x) \tag{2.59}$$

它也可直接求解。最终得到福克—普朗克方程的精确定态解：

$$P_{st}(x)=P_{st}(x_0)\frac{Q(x_0)}{Q(x)}\cdot\exp\left[N\phi(x)\right] \tag{2.60}$$

其中：

$$N\phi(x)=\frac{2}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{K(x')}{Q(x')}dx'$$

$$=\frac{2}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{W\uparrow(x')-W\downarrow(x')}{W\uparrow(x')+W\downarrow(x')}dx'$$

及

$$\varepsilon=\frac{1}{N} \tag{2.61}$$

由 $P_{st}(x)$的归一化条件（2.22）得到：

$$P_{st}(x_0)=Q^{-1}(x_0)\left\{\int_{-1}^{+1}Q^{-1}(x')\exp\left[N\phi(x')\right]dx'\right\}^{-1} \tag{2.62}$$

稳定概率分布 $P_{st}(x)$在值x_m处的极大值和极小值的定义是：

$$\left.\frac{\partial P_{st}(x)}{\partial x}\right|_{x=x_m}=0 \tag{2.63}$$

和：

$$\left.\frac{\partial^2 P_{st}(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_m}\begin{cases}<0 & x_m\text{的极大值}\\ >0 & x_m\text{的极小值}\end{cases} \qquad (2.64)$$

如果涨落项与$\varepsilon Q'(x_m)$成正比，在(2.63)和(2.64)中的$\varepsilon Q''(x_m)$（当$\varepsilon \ll 1$时）与漂移项比较可以忽略时，则（2.63）和（2.64）可化为下式：

$$k(x_m)=0$$

和

$$\left.\frac{\partial K(x)}{\partial x}\right|_{x=x_m}\begin{cases}<0 & x_m\text{的极大值}\\ >0 & x_m\text{的极小值}\end{cases} \qquad (2.66)$$

这就是说在不考虑由涨落引起的小的偏差时，在“漂移力” $k(x)=0$时得到了定态概率$P_{st}(x)$的极值。

含 时 解

1）方程的初解

$$\frac{dy}{dt}=K(y)=-\frac{\partial V(y)}{\partial y} \qquad (2.67)$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=\varepsilon Q(y)+2K'(y)\sigma \qquad (2.68)$$

这里的$y(t)$表示平均值$\langle x\rangle_t$；$\sigma(t)$是偏差，$V(y)$

是引入的势函数。这些方程适用于具有单峰概率分布的情况，并且实际上与（2.48）和（2.49）的方程是相同的。

如果令

$$q(x)=0 \text{ 或 } \varepsilon\to 0$$

忽略涨落时，从朗之万方程（2.35）也可导出方程（2.67）。因而（2.67）也描述确定的径迹。

显然，（2.67）存在着定态解：

$$y(t)=y_m=\text{Const} \qquad (2.69)$$

点y_m的定义是：

$$K(y_m)=0 \qquad (2.70)$$

根据（2.65）和(2.66)，这些点近似地与定态概率分布的极值相吻合。在y_m附近，即对小的$\eta(t)$，$y=y_m+\eta(t)$。在展开$K(y)$后得到：

$$\frac{d\eta}{dt}=K'(y_m)\eta(t) \qquad (2.71)$$

利用$K'(y_m)$是非零微商的假定，$K(y)$展开式的另一些较高阶项必须考虑。（2.71）的解就是：

$$\left.\begin{aligned}&\eta(t)=\eta_0\exp(\gamma t)\\&\gamma=K'(y_m)=-V''(y_m)\end{aligned}\right\} \qquad (2.72)$$

从势函数的极大值分岔（其中$\gamma=-V''(y_m)>0$）而归入势函数的极小值处（其中$\gamma=-V''(y_m)<0$）。

因此，势函数$V(y_m)$的极小值（极大值）是(2.67)稳定的（不稳定的）定态点。

在$V(y)$的极值之间，也就是在$K(y)\neq 0$的区域，（2.67）的形式解是：

$$\int_{y_i}^{y}\frac{dx}{K(x)}\equiv f(y,y_i)=t \qquad (2.73)$$

对满足$y(t)=f^{(-1)}(y_i;\ t)$并具有初始值$y(0)=f^{(-1)}(y_i;\ 0)=y_i$的$y(t)$可以解出。

当从（2.73）得到（2.67）的解$y(t)$后，我们便很容易导出（2.68）的具体解。用变量y取代t，用$K(y)\frac{d}{dy}$取代$\frac{d}{dt}$之后，（2.68）可写成下面的形式：

$$\frac{d\sigma}{dy}=\varepsilon\frac{Q(y)}{K(y)}+\frac{2K'(y)}{K(y)}\sigma \qquad (2.74)$$

其解是

$$\sigma(t)=\sigma[y(t)]$$

$$=\sigma_0\left[\frac{K\left(y(t)\right)}{K\left(y(0)\right)}\right]^2+K^2\left(y(t)\right)\int_{y(0)}^{y(t)}\frac{\varepsilon Q(x)}{K^3(x)}dx \qquad (2.75)$$

该解仅在$K(y(0)) \neq 0$时才不发散。在下面将会看到，在$K(y_m)=0$和$K'(y_m)=\gamma>0$的不稳定点y_m处，（2.68）的解出现指数型的涨落放大，请看本节后面的（2.93）式。

2〉我们再来探讨福克—普朗克方程（2.24）的含时解。分以下四种情况讨论：

a〉具有线性漂移和常数涨落因子的精确矩方程（2.44）、（2.45）和福克—普朗克方程(2.26)，都可精确求解。

b〉在非零漂移区域中主要由非零漂移力控制的漂移运动。

c〉分布在不稳定定态点y_m附近、由涨落触发的运动。

d〉由涨落支配的从稳定定态点y_m附近开始的运动。

对于 b〉、c〉、d〉的各种情况，可以运用由不同作者引入的适当的近似方法求解。b〉—d〉结合在一起便得出一个令人满意的概率分布运动的一般景象，可以更好地把整体分布分解为局部分布的线性迭加。因为福克—普朗克方程是$P(x;\ t)$的线性方程，这样就可用分离变量法进行处理。

情况 a〉**一个精确解**。当漂移和涨落因子如下

时：

$$\left.\begin{aligned} K(x) &= \gamma(x_0 - x) = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{当}\gamma > 0\text{时} \\ V(x) &= \frac{\gamma}{2}(x_0 - x)^2 \\ Q(x) &= Q = \text{Const} > 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.76)$$

假定精确矩方程（2.44）、（2.45）形式是：

$$\frac{d\langle x\rangle_t}{dt} = \gamma(x_0 - \langle x\rangle_t) \quad (2.77)$$

和：

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = -2\gamma\sigma(t) + \varepsilon Q \quad (2.78)$$

其解为：

$$\langle x\rangle_t = \langle x\rangle_0 e^{-\gamma t} + x_0(1 - e^{-\gamma t}) \quad (2.79)$$

和

$$\sigma(t) = \sigma(0)e^{-2\gamma t} + \frac{\varepsilon Q}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \quad (2.80)$$

进一步便可证明：

$$P(x;\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}} \exp\left[-\frac{(x - \langle x\rangle_t)^2}{2\sigma(t)}\right] \quad (2.81)$$

是具有因子（2.76）的福克—普朗克方程（2.26）的精确的和归一化解。（2.81）是一个极大值在$x = \langle x\rangle_t$的宽度为$\sigma^{\frac{1}{2}}(t)$的归一化高斯函数。平均值和标准值偏差从初始值$\langle x\rangle_0$和$\sigma^{\frac{1}{2}}(0)$开始

计算，并采用最终值 $\langle x\rangle_\infty = x_0$ 和 $\sigma^{\frac{1}{2}}(\infty) = \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{Q/2\gamma}$。

情况 b〉**漂移运动**。现在研究在 $K(x)\neq 0$ 且当 $\varepsilon \ll 1$ 的 x 区域内的福克—普朗克方程。解（2.75）指出，如果运动是从同样级数的初始变量 σ_0 开始的话，在这个漂移运动区域中，变量 $\sigma(t)$ 与 $0(\varepsilon)$ 同数量级。这个结果就使我们可以假定，这个区域中的 x 可分为：

$$\left.\begin{aligned} x &= y(t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi \\ \text{及：}\quad \xi &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(x - y(t)) \end{aligned}\right\} \qquad (2.82)$$

其中 $y(t)$ 应表示确定的径迹，而 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi$ 是数量级为 $o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ 的 $y(t)$ 的标准偏差，其目的在于导出一个简化的运动方程。当 $\varepsilon\to 0$ 时取极限

$$\Pi(\xi; t) \equiv P(y(t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi;\ t) \qquad (2.83)$$

福克—普朗克方程（2.26）乘以 ε，并将方程两边展开为 ε 的幂级数。使用（2.82）、（2.83）可有

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

并且展开式是：

$$左边=\varepsilon\frac{\partial P(x;\ t)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\Pi(\xi;t)}{\partial t}-\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dt}\frac{\partial\Pi(\xi;t)}{\partial\xi} \tag{2.84}$$

$$右边=-\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{[K(y)+K'(y)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi+\cdots]\Pi(\xi;t)\right\}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left\{[Q(y)+Q'(y)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi+\cdots]\Pi(\xi;t)\right\} \tag{2.85}$$

比较两边$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$和$\varepsilon$的系数便得到方程：

$$\frac{dy}{dt}=K(y) \tag{2.86}$$

和

$$\frac{\partial\Pi(\xi;t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\xi}[K'(y(t))\xi\Pi(\xi;t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[Q(y(t))\Pi(\xi;t)] \tag{2.87}$$

第二个方程是一个具有线性含时漂移和含时涨落的福克—普朗克方程。容易证明：

$$\Pi(\xi;t)\equiv P(y(t)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\Sigma(t)}}\exp\left[-\frac{\xi^2}{2\Sigma(t)}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}}\exp\left[-\frac{[x-y(t)]^2}{2\sigma(t)}\right] \tag{2.88}$$

是（2.87）的一个解，如果$\Sigma(t)=\varepsilon^{-1}\sigma(t)$满足，

$$\frac{d\Sigma}{dt}=2K'(y(t))\Sigma+Q(y(t)) \qquad (2.89)$$

得到的另一些结果是：

a）在漂移区域中，当方程（2.67）、（2.86）和（2.68）、（2.89）在$\varepsilon\to 0$取极限时，它们的平均值和偏差可精确求解。

b）反之亦然。在$\varepsilon\to 0$取极限的情况下，平均值$y(t)$和偏差$\sigma(t)$便满足确定的概率分布的运动方程（2.87）及其解（2.88）。

情况c〉 **涨落触发的运动**。如果运动从一个不稳定的定态点（x_0（$K(x_0)=0$，$K'(x_0)=\gamma>0$）附近的分布开始的话，（2.82，84，85）的展开式失灵，因为初始涨落指数型地增加，如后面（2.92）所示。在此，哈克和铃木增雄发展的合理的近似法分为两步：

〈1〉求解由初涨落支配阶段的福克一普朗克方程。

〈2〉寻找第二个漂移支配阶段的平稳的适当解。

在不稳定点x_0附近的福克一普朗克方程（2.26）可近似化为：

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[K'(x_0)(x-x_0)P\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\varepsilon Q(x_0)P\right] \qquad (2.90)$$

其解为：

$$P(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\Sigma(t)}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\varepsilon\Sigma(t)}\right] \quad (2.91)$$

其中偏差$\sigma(t)=\varepsilon\Sigma(t)$为：

$$\sigma(t)=\varepsilon\left(\Sigma(0)+\frac{Q(x_0)}{2\gamma}\right)e^{2\gamma t}-\varepsilon\frac{Q(x_0)}{2\gamma} \quad (2.92)$$

这里的$\gamma=K'(x_0)>0$是下面方程的解：

$$\frac{d\sigma(t)}{dt}=2K'(x_0)\sigma(t)+\varepsilon Q(x_0) \quad (2.93)$$

显然，（2.93）就是在不稳定点$x=x_0$的偏差方程（2.68）。可以看出，分布$P(x;t)$按指数增长的偏差（2.92）由$0(\varepsilon)$的数量级开始在涨落增强期间达到了$0(1)$的大小。在进入漂移支配期间之后，可以只考虑漂移项，而福克—普朗克方程中的涨落项可被忽略而写成：

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x;t)+\frac{\partial}{\partial x}[K(x)P(x;t)]=0 \quad (2.94)$$

或用：

$$P(x;t)=P[x;\tau]$$

时

$$2\gamma\tau\frac{\partial}{\partial\tau}P[x;\tau]+K(x)\frac{\partial}{\partial x}P[x;\tau]$$

$$=-K'(x)P[x;\tau] \quad (2.95)$$

其中时间变量τ为

$$\tau=\varepsilon\left(\Sigma(0)+\frac{Q(x_0)}{2\gamma}\right)e^{2\gamma t} \qquad (2.96)$$

它是由第一阶段解（2.91）的形式推出的。尚待找到能与初阶段解（2.91）吻合的第二阶段的(2.95)的解。

准线性偏微分方程（2.95）的特征方程是：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\tau}{ds}&=2\gamma\tau\\ \frac{dx}{ds}&=K(x)\\ \frac{dp}{ds}&=-K'(x)P\end{aligned}\right\} \qquad (2.97)$$

消去s得到：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{K(x)}&=\frac{d\tau}{2\gamma\tau}\\ \text{和}\\ \frac{dp}{p}&=-\frac{K'(x)}{K(x)}dx\end{aligned}\right\} \qquad (2.98)$$

其解为：

$$\tau=\tau_0\exp\left[2\gamma\int_a^x\frac{dx'}{K(x')}\right]\equiv\tau_0\varphi^2(x) \qquad (2.99)$$

和

$$P(x;\tau_0)=\frac{1}{K(x)}G(\tau_0) \qquad (2.100)$$

这里 $G(\tau_0)$ 是积分常数 τ_0 和常数a的一个任意函数，因此：

$$\varphi(x) = (x - x_0) + \cdots$$

及

$$\varphi'(x) = 1 + \cdots$$

把 τ_0 表示成x和τ的函数，由（2.100）得到(2.95)的解：

$$P[x;\tau] = P(x;\tau_0(x,\tau)) = \frac{1}{K(x)} G\left(\frac{\tau}{\varphi^2(x)}\right) \qquad (2.101)$$

显然可选择：

$$G(\tau_0) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi\tau_0}} \exp\left(-\frac{1}{\tau_0}\right) \qquad (2.102)$$

便导出第二阶段的解：

$$P[x;\tau] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \varphi'(x) \exp\left[-\frac{\varphi^2(x)}{\tau}\right] \qquad (2.103)$$

它与由涨落触发的第一阶段的解（2.91）圆滑连接。通过具体的例子可以证明，（2.103）表明了从不稳定点的单模分布沿势函数 V(x)斜坡下降为双模分布的发展。但值得一提的是当分布达到势函数 V(x) 在 x_+、x_- 临近的极小值时（其中 $K(x_+) = 0$，$K'(x_+) < 0$），不描述第一阶段的涨落

效应，这是因为在第二阶段中通过（2.94）代替（2.26）涨落已经被忽略，这可容易从守恒定律看出：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_-}^{x_+} P(x;\ t)\,dx$$

$$= -\int_{x_-}^{x_+} \frac{\partial}{\partial x}[K(x)P(x;\ t)]dx$$

$$= -\Big[K(x)P(x;\ t)\Big]_{x_-}^{x_+} = 0 \qquad (2.104)$$

从（2.104）可以得出，概率分布遵守（2.94）式，最初出现在x_-和x_+之间的概率分布，以后也决不会超越x_+或x_-。

情况d）**涨落支配的运动**。现在的研究集中在不稳定点x_0附近的势函数的极小值x_+和x_-的初始分布$P(x;\ 0)$上。在这种情况下，通过壁之间的概率流发生的慢平均过程最终会建立定态分布$P_{st}(x)$。由于漂移力$K(x)$使之趋向极小值x_-和x_+，它不可能在这个过程中起支配作用。实际上运动由涨落支配着。

现在推导以下函数的运动方程：

$$\left.\begin{aligned}\pi_+(t) &= \int_{x_0}^{1} P(x;\ t)dx \\ \text{及}\qquad \\ \pi_-(t) &= \int_{-1}^{x_0} P(x;\ t)dx\end{aligned}\right\} \qquad (2.105)$$

使用福克—普朗克方程(2.27)和边界条件（2.29）便导出：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\pi_+}{dt} &= -\int_{x_0}^{1}\frac{\partial}{\partial x}I(x;\ t)dx = I(x_0;\ t) \\ \frac{d\pi_-}{dt} &= -\int_{-1}^{x_0}\frac{\partial}{\partial x}I(x;\ t)dx = -I(x_0;t)\end{aligned}\right\} \qquad (2.106)$$

在求解这些方程之前，先叙述一下概率流$I(x;\ t)$的简便公式：

$$\frac{2I(x;\ t)}{Q(x)P_{st}(x)} = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P(x;\ t)}{P_{st}(x)}\right) \qquad (2.107)$$

通过把具体的定态解（2.60）代入（2.107）中的$P_{st}(x)$便可方便地证明，该方程与原来对$I(x;\ t)$定义的（2.28）式是等效的。现在进一步作出假定，在演化过程中，x_+和x_-的概率模之间的概率

流不依赖于位置x。这就是说

$$\left.\begin{aligned} &I(x;\ t) = I(t) \\ &\text{当} x_- \leqslant x \leqslant x_+ \end{aligned}\right\} \tag{2.108}$$

从x_-到x_+积分（2.107），根据（2.108）的假定便得：

$$I(t) = -\gamma\left(\frac{P(x_+;\ t)}{P_{st}(x_+)} - \frac{P(x_-;\ t)}{P_{st}(x_-)}\right) \tag{2.109}$$

以及：

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_{x_-}^{x_+}[Q(x)P_{st}(x)]^{-1}dx\right)^{-1} \tag{2.110}$$

因为在整个演变过程中概率集中在x_+和x_-的附近，也有理由假定：

$$\frac{P(x_+;\ t)}{P_{st}(x_+)} = \frac{\pi_+(t)}{\pi_{+st}} \tag{2.111}$$

将（2.109）、（2.111）代入（2.106）的右边，最后便可看到：

$$\frac{d\pi_+}{dt} = -\frac{d\pi_-}{dt} = -\gamma\left(\frac{\pi_+}{\pi_{+st}} - \frac{\pi_-}{\pi_{-st}}\right) \tag{2.112}$$

即：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\pi}{dt} = 2\Gamma[\pi_{st} - \pi(t)] \\ &\pi(t) = \pi_+(t) - \pi_-(t) \\ &\Gamma = \frac{\gamma}{2\pi_{+st}\pi_{-st}} \end{aligned}\right\} \tag{2.113}$$

为了计算比率Γ或转移时间$\tau=\Gamma^{-1}$，必须将定态解（2.60）代入（2.110）。考虑到在对称情况下成立的关系式：

$$\begin{aligned}
&K(-x)=-K(x)\\
&Q(-x)=Q(x)\\
&P_{st}(-x)=P_{st}(x)\\
&\pi_{+st}=\pi_{-st}=\frac{1}{2}\\
&x_0=0\quad x_+=x_m=-x_-
\end{aligned}\tag{2.114}$$

便得出转移时间：

$$\tau=\Gamma^{-1}=N\left\{\int_{-x_m}^{+x_m}\exp[-N\phi(x')]dx'\right\}\left\{\int_{-1}^{+1}Q^{-1}(x')\exp[N\phi(x')]dx''\right\}\tag{2.115}$$

用最陡下降法计算积分得：

$$\tau=\frac{4\pi Q^{-1}(x_m)}{\sqrt{\phi''(0)\,|\,\phi''(x_m)|}}\exp[N\phi(x_m)]\tag{2.116}$$

显然，从x_-到x_+的分布运动的转移时间是最长的

时间，因为它对N（N≫1）是指数依赖关系。时间τ应能与在漂移支配区域通过确定的距离Δx的径迹所用的时间相比，根据（2.59），后者便为：

$$\Delta t = \int_{y_1}^{y_1+\Delta z} \frac{dx'}{K(x')} \qquad (2.117)$$

2-4 转移概率的选择和模型的形式

在§2和§3中已经讨论了一般模型的方程和它们的解，但没有具体确定起决定作用的(2.2)式所定义的转移概率$p_{ij}(n)$。

为了得到具体的结果，必须确定$p_{ij}(n)$的具体公式。基本上可分为两种方法：

a）可通过对某种舆论形成环境中的人群调查来确定$p_{ij}(n)$。

b）可以完善$p_{ij}(n)$的理论公式。这个公式应该非常灵活地描述各种各样的可能性；即必须含有一个或更多的待定参数。将这个公式代入模型方程便得到社会构形的某种结构。然后，为了证明转移概率选择得是否合理，还必须与实际进行比较。

第一种方法是直接的然而也是比较困难的方法：政治舆论形成的过程是一个复杂的过程，并且用这个方法难以从试验中找到在实际过程中舆论变化和舆论分布的依赖关系。因此，我们采用第二种方法。

在公共舆论形成过程中，对社会每个成员的转移概率至少要进行以下的心理学和政治的修正和考察。

a〉某些人对两种舆论中的一种有偏好。这种偏好由固有的倾向和特有的传统或特殊的观察力以及对形势的看法产生。

b〉也存在着一定的顺应于盛行舆论的趋向，这种趋向使一种舆论变得越来越占压倒优势。这种顺应倾向可以由各个人的固有的适应或在外界压力影响下而作出的顺从多数人意见的结果来决定。

c〉偏好和顺应两种趋向在各个人身上都应考虑到。在一定的形势下，两种趋向是无关的，其强度也不相同。

为简便起见，假定各个成员的这些趋向具有相同的强度。考虑到a〉——c〉时，$p_{ij}(n)$ 应取如下公式：

$$
\begin{aligned}
p_{12}(n) &= v\exp(\delta + \tilde{k}n) \\
&= v\exp(\delta + kx) \\
p_{21}(n) &= v\exp[-(\delta + \tilde{k}n)] \\
&= v\exp[-(\delta + kx)]
\end{aligned}
\qquad (2.118)
$$

所用的$k = N\tilde{k}$，其中δ，k和v是趋向参数，对转移概率的影响可作如下说明：

a）显然，当$\delta > 0$时，从舆论2到舆论1的概率增长，从舆论1到2的概率减少，当$\delta < 0$时，恰巧相反。因此δ表示为一种偏好参数。

b）显然要记住n和x的定义，当k为正时，增强了赞成多数舆论的转移概率，同时减少了向少数舆论方面的转移概率。当增加$|x|$即增加舆论的不平衡时，这种影响便增长了。概率$p_{12}(n)$通过kx依赖于社会构形。因此k表示了顺从参数。

c）偏好和顺从趋向自然就迭加到了（2.118）中，而转移概率是由定义来确定的。

d）参数v决定着出现反转过程的频率，换句话说，它表示舆论发生变化的时间尺度。v代表灵活参数。

现在将（2.118）代入到各个方程中便得出具体模型。在社会概率$p(n; t)$的主方程（2.9）中，

$\omega\uparrow(n)$和$\omega\downarrow(n)$必须用下边的公式：

$$\omega\uparrow(n)=\nu(N-n)\exp(\delta+\tilde{k}n)$$

$$\omega\downarrow(n)=\nu(N+n)\exp[-(\delta+\tilde{k}n)] \tag{2.119}$$

在福克—普朗克方程（2.26）中应该用：

$$W\uparrow(x)=\nu(1-x)\exp(\delta+kx)$$

$$W\downarrow(x)=\nu(1+x)\exp[-(\delta+kx)] \tag{2.120}$$

漂移因子

$$K(x)=-\frac{\partial\nu(x)}{\partial x}=W\uparrow(x)-W\downarrow(x)$$

$$=2\nu[\sinh(\delta+kx)-x\cosh(\delta+kx)] \tag{2.121}$$

其势函数

$$V(x)=\frac{2\nu}{k^2}[kx\sinh(\delta+kx)$$

$$-(1+k)\cosh(\delta+kx)]+\text{const} \tag{2.122}$$

以及涨落因子

$$Q(x)=W\uparrow(x)+W\downarrow(x)$$

$$=2\nu[\cosh(\delta+kx)-x\sinh(\delta+kx)] \tag{2.123}$$

现在，将这几个因子代入平均值$\langle x\rangle_t$和偏差$\sigma(t)$的（2.48）和（2.49）式，便得到一对方程：

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt'}=2[\sinh(\delta+k\langle x\rangle)-\langle x\rangle\cosh(\delta+k\langle x\rangle)]$$

$$\frac{d\Sigma(t')}{dt'}=2[\cosh(\delta+k\langle x\rangle)-\langle x\rangle\sinh(\delta+k\langle x\rangle]-4\Sigma[(1-k)\cosh(\delta+k\langle x\rangle)+k\langle x\rangle\sinh(\delta+k\langle x\rangle]$$

（2.124）

其中

$$t'=\nu t,\quad \Sigma(t')=N\sigma(t')$$

（2.125）

只要分布一直保持为单模（第三节），上述诸式就肯定成立。

如果将（2.119）式用到（2.55）时，便可计算所得的式子，对主方程得到的具体解为

$$p_{st}(n)=p_{st}(0)\frac{(N!)^2}{(2N)!}\binom{2N}{N+n}\exp[2\delta n+\tilde{k}n^2]$$

（2.126）

用斯特灵公式进一步计算二项式系数和其它因子：

$$\ln(M!)\doteq M\ln M-M \qquad (2.127)$$

便得到了更简便的$p_{st}(n)$的公式：

$$p_{st}(Nx) = p_{st}(0)\exp[NU(x)] \qquad (2.128)$$

其中：

$$U(x) = 2\delta x + kx^2 - [(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)] \qquad (2.129)$$

由下式确定这个分布的极值：

$$\left.\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right|_{x=x_m} = 2\delta + 2kx_m - [\ln(1+x_m) - \ln(1-x_m)] = 0$$

即：

$$x_m = \tanh(\delta + kx_m) \qquad (2.130)$$

福克——普朗克方程的定态解给出了几乎相同的结果。将它代入（2.60）：

$$P_{st}(x) = Np_{st}(Nx)$$

$$= P_{st}(x_0)\frac{Q(x_0)}{Q(x)}\exp[N\phi(x)]$$

同样由（2.123）的涨落因子$Q(x)$给出了：

$$\phi(x) = 2\int_{x_0}^{x} \frac{\sinh(\delta + kx') - x'\cosh(\delta + kx')}{\cosh(\delta + kx') - x'\sinh(\delta + kx')}dx' \qquad (2.131)$$

当N很大时，$P_{st}(x)$的极值由下式确定

$$K(x_m) = 2v[\sinh(\delta + kx_m)$$

$$-x_m\cosh(\delta+kx_m)]=0 \qquad (2.132)$$

该方程与（2.130）是一致的。

对$0<k<1$时的任意δ值，超越方程（2.130）的图解，只有一种可能解x_m。该解对应于定态分布$P_{st}(x)$的极大值。在另一方面，当$k>1$，$|\delta|>\delta_0$时仍有一个解x_m，而当$k>1$、$|\delta|<\delta_0$时有三个解$x_-<x_0<x_+$，其中δ_0由方程：

$$\cosh^2[\delta_0-\sqrt{k(k-1)}]=k \qquad (2.133)$$

确定。当$|\delta|=\delta_0$时三个解x_+、x_0、x_-中的两个在

$$x_c=\pm\sqrt{\frac{K-1}{K}} \qquad (2.134)$$

处重合。在三个解中$P_{st}(x)$的两个极大值在x_+和x_-，一个极小值在x_0。

2-5 模型的社会含义

我们现在可以进行社会政治舆论形成的半定量讨论了。

为了使模型的外观简单，我们假定只有两种舆论，并且每种舆论中的成员都具有相同的趋向参数，这似乎是资本主义社会中常常看到的趋于“灵

活的”和“保守的”的两个政党的舆论。同样在专制社会中，也会看到两种主要思想体系之间的斗争，执政的一方力图保护它的“成绩和信心”，并且“反对革命”。再者，现代的宣传工具使社会中得到了一致的信息，从而导致舆论一律，——至少在大部分的人中是这样的。

主方程和福克—普朗克方程可描述社会整体的运动和概率分布的形状的普遍问题。在只有一个取样社会时就只好研究它对应的一条朗之万径迹。但大家知道，一个分布 $P(x;\ t)$ 的模（或者诸模）对应着最可几的朗之万径迹，由各种随机涨落引起的分布偏移以及朗之万径迹 $x(t)$ 与平均径迹 $\langle x\rangle_t$ 的偏差与稳定的整体无关，在空间元 dx 中找到朗之万径迹的频率与概率 $P_{st}(x)dx$ 成正比。现在讨论两种主要情况：

a）与政治舆论结构的演变时间相比，假定在长时间内趋向参数 δ、k 和 ν 保持常数。在这个条件下，我们讨论社会构形的平衡分布的参数 δ、k 和 ν 的集合和它们的非平衡社会构形的发展。

b）描述舆论形成的各种趋向参数 δ、k 和 ν 可作为时间函数。也要探讨在这个条件下得到的一些合理结果。

情况a）：一种是以图2.1～3为基础的解释，它表示了在选定的k和δ（在p_{st}（n）中不含v）情况下（2.128）、（2.129）的稳定分布p_{st}（n）。为了获得直观上分布的大偏移，选取了小的数N=25。选取大的N时，不会改变U（x），而分布在模周围的偏移以$N^{-\frac{1}{2}}$的比例减少。当k=0.5时，可以用图2.1解释一种自由社会，因为趋向顺应于优势舆论的参数很小。当δ起重要作用时，描述了各个成员不拘泥于偏好。当δ=0，即没有偏好时，最可几概率的社会（概率分布的模）是$n=0$或$n_1=n_2$，即舆论n_1和n_2具有相等的概率。以这个平均状态附近的涨落来度量分布的偏移。当δ=0.02时，即各个成员偏好于舆论1时，在这个方向的平均值

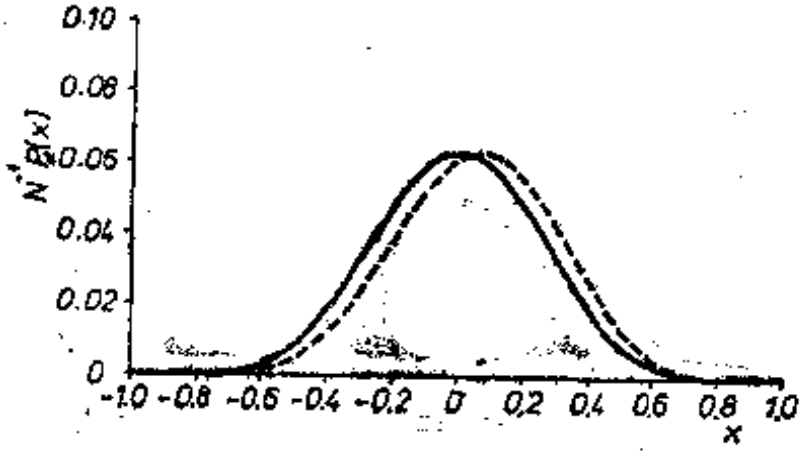


图2.1 当N=25，K=0.5
δ=0（实线）和K=0.5，δ=0.02
（点划线）的分布P_n（x）

便发生了移动，然而分布的形状仍然近于相同。

当 $k=1$或$k=1.07$时，正如图2.2表明的那样，描写处于专制和自由的十字路口的社会。值$k_c=1$是趋向参数k的临界值，在$\delta=0$时势函数（2.129）从单稳态变为双稳态，分岔的可能结果正如本章§3所展示的那样。

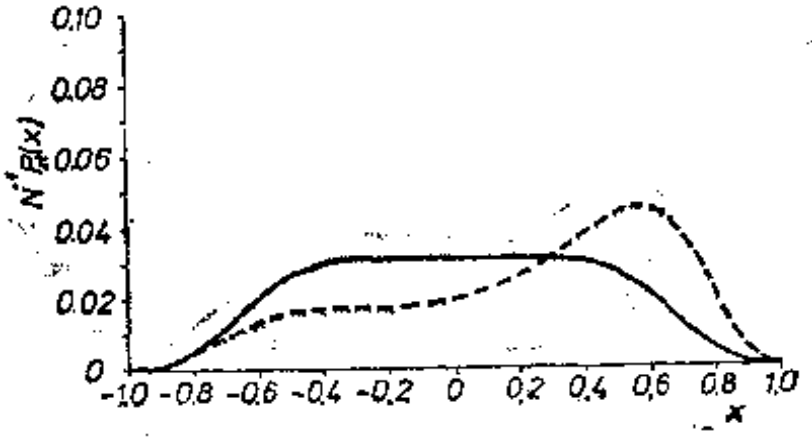


图2.2 当N=25，
$k=1.0$，$\delta=0$（实线）和
$k=k_0=1.07$，$\delta=0.02$
（点划线）时的分布

当$\delta=0$时，在$x=0$附近出现了一个极值分布的情况，即最可几社会仍然具有平衡的舆论分布。但现在分布的偏移很大。这意味着，大的和持久的涨落作用下可能会脱离平衡状态。其原因不是各成员的偏好，而是正在转向盛行的舆论。

在$k=1.07$和$\delta=0.02$的情况下，在图2.2中可

观察到分布的平均值比图2.1向边界$x=+1$处移动了，参数用的是相同的偏好参数 $\delta=0.02$。这意味着舆论排布结果使社会构形的平均值移向了流行方向。

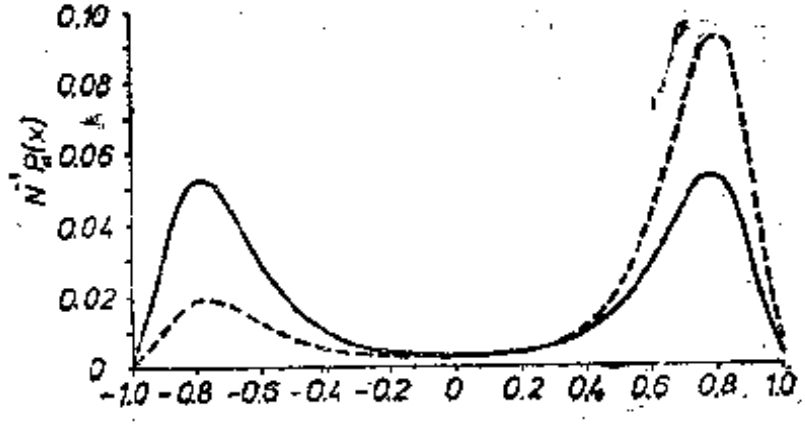


图2.3 当$N=25$，
$k=1.3$，$\delta=0$（实线）和
$k=1.3$，$\delta=0.02$（点划线）
时的分布$P_n(x)$

当$k=1.3$（图2.3）时，可以说明具有高度配合持盛行舆论的专制国家（不管是什么样的动力）的情况。可以设想：甚至在$\delta=0$（不存在偏好）的情况下，也不可能实现具有平衡舆论构形的社会。实际上，最容易出现具有极其盛行的舆论1或2以及在x_+或x_-附近为不对称舆论构形的社会。这种情况是社会成员相互配合而共同建立的。显然，这个结果与舆论1或2的“实际”内容无关。

在$\delta=0.02$的情况下，确实找到了盛行 $\delta>0$时预期在 x_+ 的最大概率峰值。但通过与图2.1的比较说明，它的极大值向着边界$x=+1$移动了；强烈配合倾向产生了一种夸大了的偏好并急剧地移动着的舆论构形。

更为有趣的是出现在 $x_-<0$ 的一个小的概率峰。可以假定它为——由于例如说以前的历史——取样社会不属于大的而属于小的概率峰。（下文中对趋向参数瞬时变化的研究表明，这的确是一种有关的情况。）这可能意味着，在该社会中，集体建立的舆论构形在 $x_-<0$ 同全部成员的各个偏好参数 $\delta>0$ 的符号相反。人们天真的期待着这样的社会会很快地运动到最大概率峰的区域。但是，通过（2.110）的计算表明，这种事件的可能性很小。换句话说，只要趋向参数（尤其在高顺从参数 $k>1$时）保持常数并在没有外部作用干扰或扰动的情况下，即使各个成员的偏好与集体建立的舆论的意见不同，专制社会的共同舆论的构形仍以自持的形式长期维持着。图2.4和图2.5通过离散主方程的模型解表明了这种演变的图象。其中仍选择 $N=25$ 来说明。在图2.4和图2.5中，假定初始分布（$t\leqslant 0$）的参数为 $k_0=0.5$，$\delta_0=0$ 和 $k_0=0.5$，

$\delta_0 = -0.15$时的平衡分布。在$t = 0$时参数值$k = 1.5$和$\delta = 0$引起了骤然变化。图2.4和图2.5具体表明了从主方程计算的分布进入新平衡状态的弛豫过程。

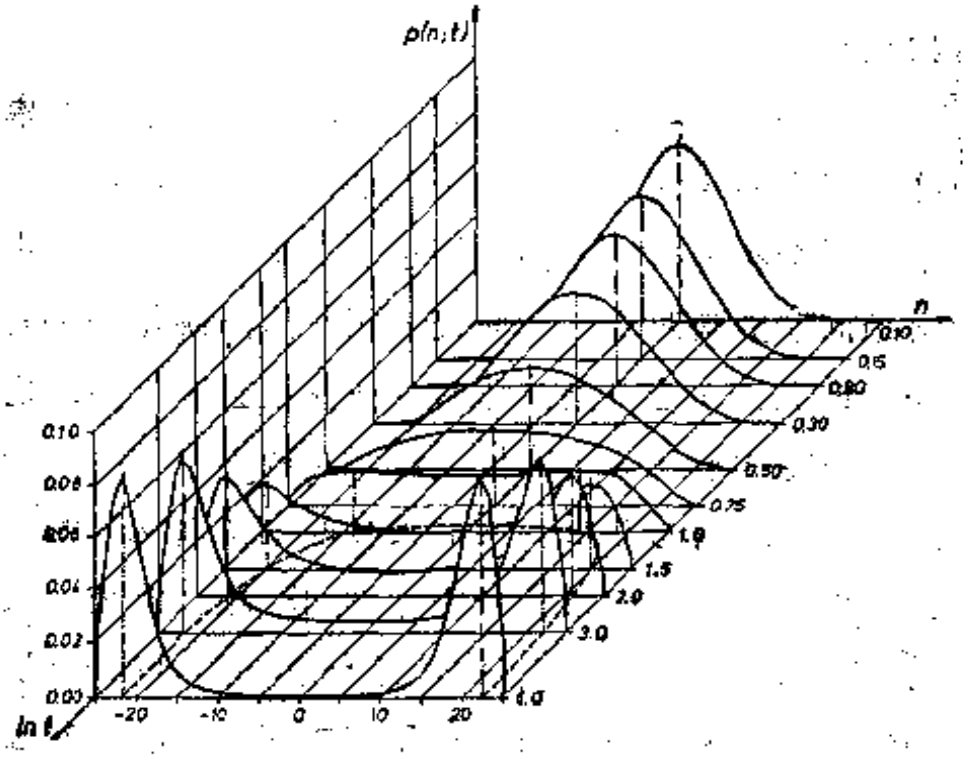


图2.4 从对称初始分布到平衡分布的演变过程。主方程的参数$N = 25$、$k = 1.5$和$\delta = 0$

在图2.4中分布保持对称。初涨落的增强使达到双峰的平衡分布。在图2.5中，发展的第一阶段与图2.4相同。它发展为具有不同高度的双峰分布。最终涨落支配发展为对称的但低的双峰分布。将具

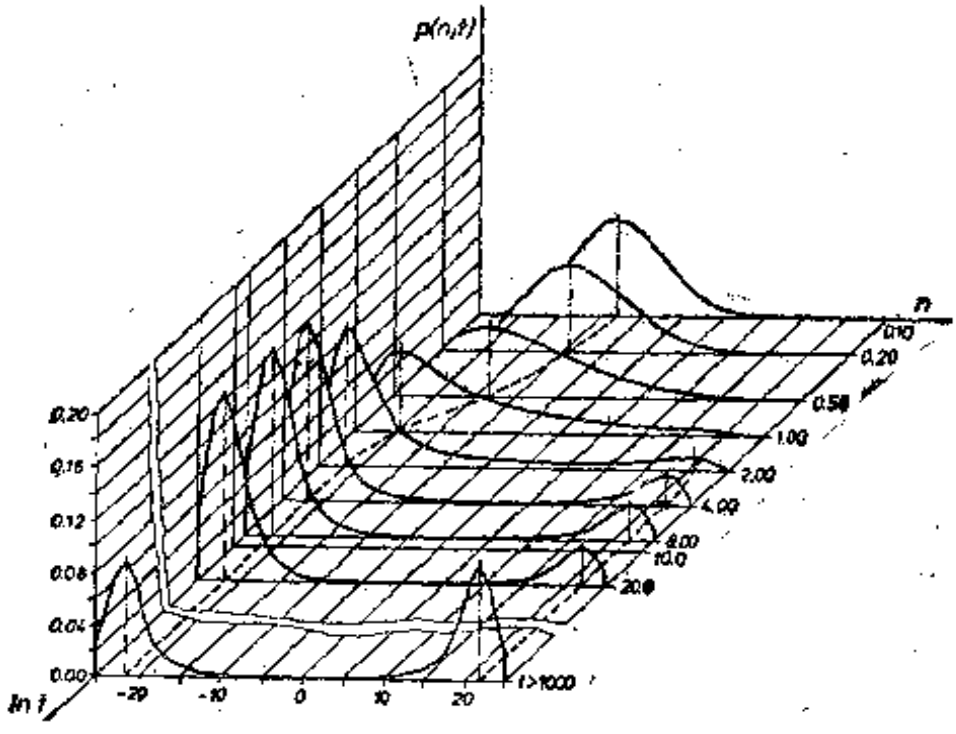


图2.5 从对称初始分布到平衡分布的演变过程。主方程参数 $N=25$、$k=1.5$和$\delta=0$

体方程（2.121）、（2.123）、（2.131）代入（2.116），便得集体舆论的转移时间为：

$$\tau=\frac{\tau}{\sqrt{(k-1)\left|k(1-x_{01}^{2})-1\right|}}\exp\left[2N\int_{0}^{x_m}\frac{\tanh(kx')-x'}{1-x'\tanh(kx')}\,dx'\right]$$

$$\approx 10^{3} \qquad (2.135)$$

这是在$N=25$，$k=1.5$和$\delta=0$时的标度时间单

位。

因这些方程画出的图2.6表现出顺从参数k和τ的（在给定的N）的强的准指数依赖关系。这个结果可以认为是专制系统中（$k>1$）顺从趋向的强度决定着舆论变化的时间。

图2.7表明了在一定的顺从参数k时，转移时间τ—N的关系曲线。这说明，例如工业部门的厂商作为“独立单位”时，工业部门厂商的经济决策特性的共同相互作用（第五章）。

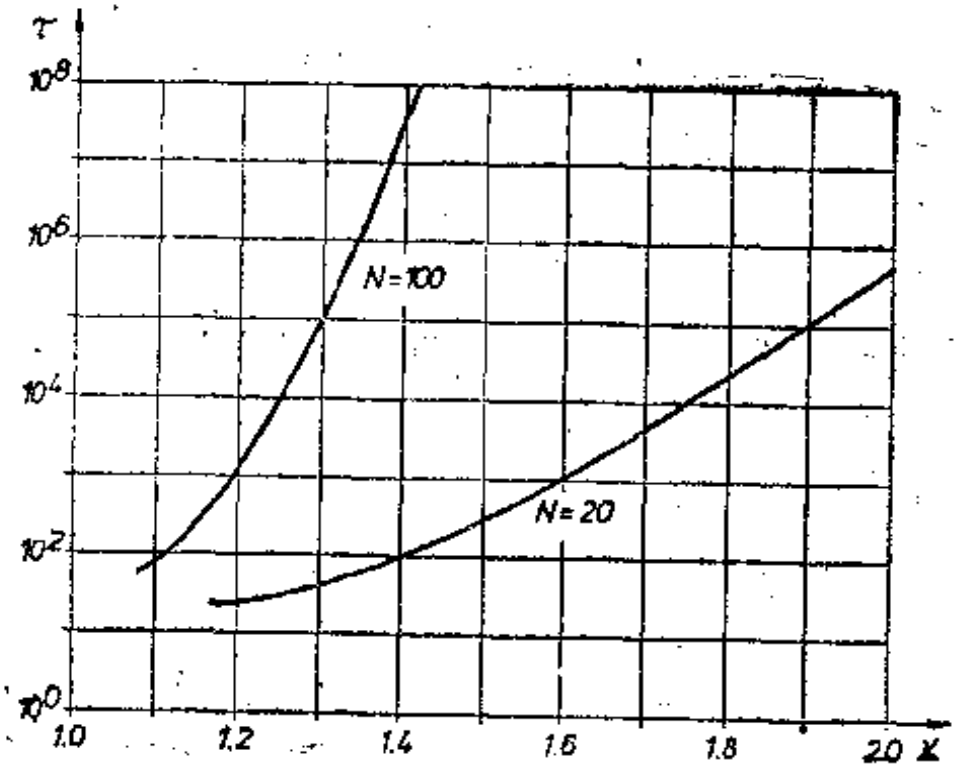


图2.6 顺从参数k和转移时间τ的准指数关系

情况b）：再讨论一下模型的推广问题。直到现在，趋向和控制参数是当作常量的。实际上，在社会构形和趋向参数间存在着反馈，后者也将成为动力学变量。这个普遍的问题也将在第三章的模型中加以讨论。在此，我们暂给出一种简化的时间关系：

$$\delta(t)=\delta_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad (2.136)$$

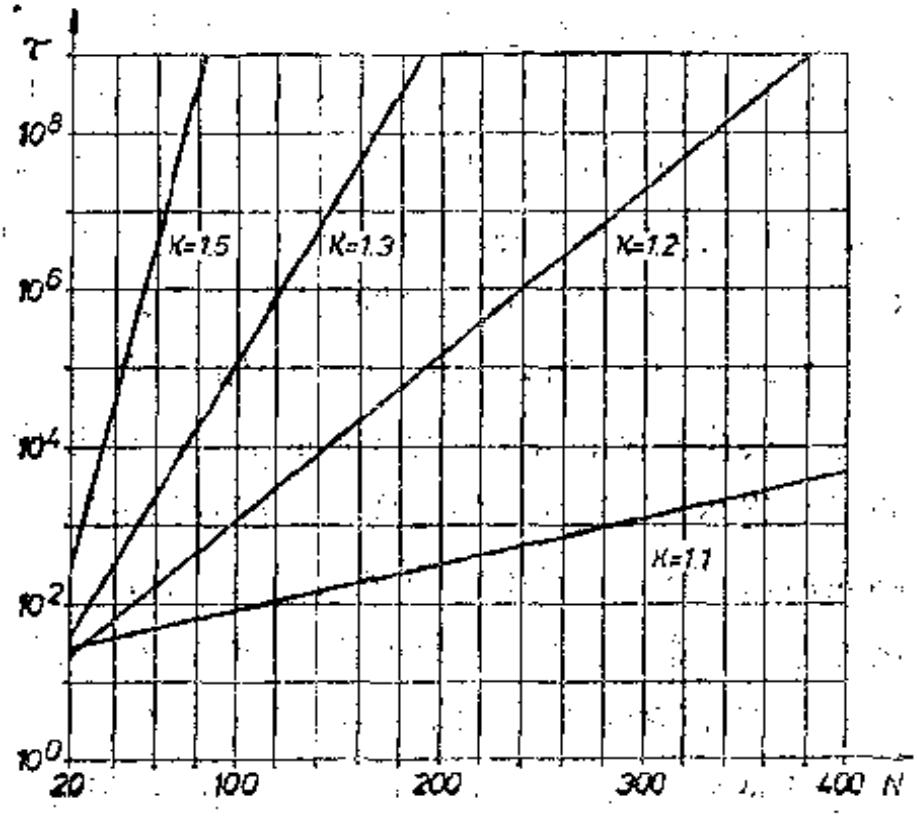


图2.7　在一定的顺从参数k时，N和转移时间τ的关系曲线。

即：在保持k和ν为常数的情况下，偏好参数δ在$\delta=0$的周围以频率$\omega=\frac{2\pi}{T}$、幅度δ_0进行周期变化。δ的时间关系是可知的，因为这个政治趋向参数似乎是最容易受到环境和个人印象的影响，并且在社会中确实可以观察到偏好倾向的周期变化。

通过将（2.136）的δ(t)代入平均值$\langle x\rangle_{t'}$和偏差σ(t′)的运动方程（2.48）、（2.49），并注意到周期T和⟨x⟩的径迹，以及σ是以标度时间$t'=\nu t$为单位度量的。当然，δ(t′)的周期变化作用使$\langle x\rangle_{t'}$和Σ(t′)以相同的周期变化，这是由（2.136）得出的时间关系的普遍情况。现在讨论在一周期内$\langle x\rangle_{t'}$和Σ(t′)对T尤其是对k的依赖关系。

当取$k=0.5$和$T=10$，相应于偏好倾向（T很小时）很快变化的自由社会（k很小），舆论构形的平均值$\langle x\rangle_{t'}$随着δ(t′)的变化进行着稳定的和准确的周期变化，尽管有一点滞后现象。伴随分布变化的方差和宽度在$\langle x\rangle_{t'}$改变符号时很小，但当$|\langle x\rangle_{t'}|$达到它的极大值时，方差和宽度很大。

当取$k=0.5$、$T=50$时，相应于偏好倾向（T大）慢变化的自由社会。所有变量的时间关系几乎与上相同，但现在的舆论构形$\langle x\rangle_{t'}$与δ（t′）几乎没有滞后的现象。

总之，在自由社会中社会构形（集体舆论构形）的运动准确地随着偏好参数δ的发展而变化，方差（即分布的偏移）的一般值只相当于在取样径迹的平均值附近的小涨落。

当取 $k=1.5$ 和 $T=10$ 时，这相当于偏好倾向 $\delta(t')$ 急剧变化的专制社会（大于上面临界值的 k）。虽然强烈的局部偏好倾向会施加在平均值 $\langle x\rangle_{t'}$ 上，这时 $\delta(t')$ 的很快的交替变化干扰了大顺从参数 k 要建立的盛行舆论。但在 $\delta(t')$ 和 $\langle x\rangle_{t'}$ 出现正号时，大的方差相当于大涨落的发展。

当取 $k=1.5$ 和 $T=50$ 时，这相应于偏好倾向 $\delta(t')$ 慢变化的专制社会。盛行的初始建立的舆论仍然是稳定的（尽管个别的偏好已经达到了正号的大幅度），直到集体舆论构形骤然（革命）崩溃从而建立正倾向的构形时。然而，由于 k 值大，所以这种正倾向的舆论一直延续到为下一次的“革命”偏好倾向所代替。然而在准稳定性舆论状态时的很小的方差，在革命性破坏期间也会出现 $\Sigma(t')$ 的显著增长。在这个期间，大的涨落会使对单个取样社会的可预言性减小。

总之，这个模型解的启示是：专制社会会引起滞后的不可靠的稳定周期——社会构形的革命和不

能准确预见的转变。

如果进一步发展这个模型还会涉及到有关近期历史的许多事件。尤其是在自由社会中的平稳的革命性转变和专制社会中的硬性革命性的转变。

第三章

定量社会学的基本概念

在这一章，我们引入社会动力学过程定量方法的一般概念。定量化过程可分为两个步骤：首先要找到描述社会系统的恰当的宏观变量，其后再建立宏观变量的运动方程。

3-1 态度空间、社会构形和局势空间

我们在引论中已经阐明，由于缺乏子系统的详细信息和分析，因此不能建立社会过程的微观理论。我们的兴趣在于用唯象的概率分布描述宏观状态的时间径迹。

尽管如此，我们仍然需要考察社会中的各个成员。各个成员之间的差别，是各有各自的“生活侧

面”。比如政治、宗教、教育、消费等侧面。我们描述反映各个成员相互联系的各个侧面（一旦弄清了这些联系，就可以建立模型——反映在它们的运动方程之中）。

在描述和定义侧面时，应该反映出各个人对这些侧面（例如舆论、宗派、条件、购买习惯等）的不同态度。从动力学的观点出发，态度就是各个人的宏观状态变量，即经过复杂思维合成为情绪、感受和行为。

为了避免拓扑学问题，尤其是在态度空间定义“距离问题”，我们把各侧面中的态度当作离散数。

假定有A个侧面，而且在每个侧面a中有d_a种态度$i_a=1, 2, \cdots, d_a$，其中$a=1, 2, \cdots, A$。这样就支起了A个侧面的A维态度空间$\mathcal{Q}$。每个成员的态度矢量$\vec{i}=\{i_1, i_2, \cdots, i_A\}$指向$\mathcal{Q}$空间的一个格点，它表明了这个成员对所有A个侧面的态度。因此共有

$$L=\prod_{a=1}^{A} d_a \tag{3.1}$$

个格点。

如果社会由N个成员组成，又可分成P个团

体，团体$\mathscr{P}_\alpha$中有$N\alpha$个成员（$\alpha=1, 2, \cdots, P$）。因此

$$N=\sum_{\alpha=1}^{P} N\alpha \tag{3.2}$$

这样就可以用各团体的成员在$\mathscr{U}$空间中的概率特性进行描述了。

当考虑到成员的出生和死亡以及迁入和迁出过程时，$N\alpha$就是时间的函数了。

一般来说，在一个团体$\mathscr{P}_\alpha$中的$N\alpha$个成员的态度是不同的，我们用$n_{\alpha i}$表示$\mathscr{P}_\alpha$中态度为$\vec{i}=\{i_1, i_2, \cdots, i_A\}$的成员数。因此

$$N_i=\sum_{\alpha=1}^{P} n_{\alpha i} \tag{3.3}$$

而且社会中各种态度$\vec{i}$的总数有下面的关系

$$N_\alpha=\sum_{i=1}^{L} n_{\alpha i}$$

$$N=\sum_{i=1}^{L}\sum_{\alpha=1}^{P} n_{\alpha i}=\sum_{i=1}^{L} N_i=\sum_{\alpha=1}^{P} N_\alpha \tag{3.4}$$

现在用社会构形描述社会的宏观状态。

$$\vec{n} = \{n_{\alpha j}\} \equiv \{n_{11}, \cdots, n_{P1}, \cdots, n_{\alpha i}, \cdots, n_{1L}, \cdots n_{PL}\}, \quad (3.5)$$

它由$C = PL$个$n_{\alpha i} \geqslant 0$的整数基元所组成。社会构形描述了社会团体$\mathscr{P}_\alpha$中各个成员的态度分布。

我们用C维社会构形的$\mathfrak{C}$空间的运动点$\vec{n}(t) = \{n_{\alpha i}(t)\}$表示取样社会的社会构形的时间关系。这里的$\mathfrak{C}$空间相当于统计力学中的相空间。当然，在$n_{\alpha i} \gg 1$和恰当地选择$N_0 \gg 1$的情况下可以使用准连续变量$X_{\alpha i} = n_{\alpha i}/N_0$。

在了解一个社会的内在动力学时，必不可少的态度和社会构形主要与各个成员的心理状态、能动性、社会的文化和政治环境有关。除了描写心理状态的变量外，在描述社会局势时还必须计入：理想经济变量、整个国民生产、生产与投资的比率、通货膨胀率、就业状况、资金积累、新技术水平等变量。很容易将这些变量定量化，因为可以通过调查社会的实际数据或者估值。然而，困难仍在于如何选择定量参数的问题。

同时还存在着如何将空间维数决定的“具体局势”的复杂分量定量化的更为困难的问题。举例来说，管理机构的效率和官僚主义程度、社会经济中“资本主义的”或“社会主义的”结构程度、社会

法律中自由或权力范围的定量化问题。在这种情况下，定量化的一般方法只能求助于在可能实现的一组适当表示的集合上的加权平均数。

在给出了具体局势的S个侧面的定量计量定义y_β（$\beta=1, 2, \cdots, S$）之后，可以引入S维的局势空间$\mathfrak{S}$，这样就可用局势矢量

$$\vec{y}=\{y_1, \cdots, y_s\}\in\mathfrak{S} \qquad (3.6)$$

描写局势了。

通过“社会构形”和“局势矢量”的概念，我们就可以把社会动力学应用到：

在已知的局势矢量$\vec{y}$和各个成员的心理状态的内在趋向参数$\vec{k}=\{k_1, \cdots, k_T\}$的影响下，就会形成一定的态度分布和社会构形$\vec{n}(t)$。各个成员的态度转变引起了$\vec{n}(t)$的运动。在另一方面，在社会构形影响下会驱使局势矢量$\vec{y}(t)$进入新的状态。例如，通过具有某种态度的人的积极活动就可能改变经济和立法权的局势。同时，变化了的局势$\vec{y}(t)$还要反作用于社会构形$\vec{n}(t)$。在简单假定下，运动可以终止在定态$\{\vec{n}_{st}, \vec{y}_{st}\}$。但是一般来说，$\vec{n}(t)$和$\vec{y}(t)$之间的相互作用会引起一种无休止的高度复杂的耦合运动。在本书中讨论了几

个这样的例子。

迄今为止，在社会构形的定义和局势矢量中尚未考虑到各个成员的态度和具体局势的各个侧面。当然，也不能想象能同时解决所有成员的态度和局势的各个侧面。在社会定量过程的初期，也只是作为$\mathcal{U}$和$\mathcal{G}$空间中的子动力学来讨论的。

分析的结果表明，主要问题在于选择一组成员和局势的侧面变量，它们的动力学应该能够进行分离变量和隔离相互影响。是否能够选择具有自持动力学行为的几个变量直接关系到模型的本领和有效性。

3-2 社会构形的运动方程

我们在本章§1中已经阐明了社会构形的意义。社会构形和局势矢量的运动是相互耦合的。然而，在一级近似下求解社会构形的运动方程仍然是合理的。社会构形$\vec{n}(t)$的运动是由远比局势灵活得多的集体心理过程产生的。这就是说$\vec{n}(t)$的变化往往（并不总是）比$\vec{y}(t)$快得多。这时的$\vec{y}(t)$可看作准常量，而不需要考虑它和$\vec{n}(t)$之间的动

力学耦合关系。在第二章和第四章的模型中就采用了这种近似。

主 方 程

概率分布的主方程是描写含有涨落的社会构形（3.5）的最基本的方程。

首先引入时刻t社会构形在状态$\{n_{\alpha i}\}$的概率

$$p(\{n_{\alpha i}\}, t) \equiv p(\vec{n}, t) \qquad (3.7)$$

它满足归一化条件

$$\sum_{\{\vec{n}\}} p(\vec{n}, t) = 1 \qquad (3.8)$$

它的取和包括所有可能的非负整数$\{n_{\alpha i}\}$，即在$0 \leqslant n_{\alpha i} < \infty$。

再者，所谓的条件概率

$$p_{t+\tau|t}(\vec{n}_0 + \vec{k}, \vec{n}_0) \qquad (3.9)$$

是在时间$t+\tau \geqslant t$和$k \equiv \{\vec{k}_{\alpha i}\}$，$k_\alpha = 0, \pm 1 \cdots\cdots$找

$$\vec{n}_0 + \vec{k} \equiv \{n_{0\,11} + k_{11}, \cdots, n_{0\alpha i} + k_{\alpha i}, \cdots + n_{0\,PL} + k_{PL}\}$$

到构形的概率，假定在时刻t的初始构形为

$$\vec{n}_0 \equiv \{n_{0\,11}, \cdots, n_{0\alpha\beta}, \cdots, n_{0\,PL}\}$$

换言之，（3.9）是初始分布为

$p(\vec{n};t)=\delta_{\vec{n}_0,\vec{n}}$（其中$\delta_{\vec{n}_0,\vec{n}}$是克朗尼克符号）时的构形$\vec{n}=\vec{n}_0+\vec{k}$的概率分布$p(\vec{n};\ t+\tau)$。

显然，这个初始分布与点$\vec{n}=\vec{n}_0$有关。假若研究的是马尔可夫过程，即条件概率与时刻t以前的$\vec{n}_0$的运动无关。如果构形$\vec{n}_0+\vec{k}$或$n_{0\alpha i}+k_{\alpha i}$以及$\vec{n}_0$或$n_{0\alpha i}$是负数时，则（3.9）等于零。

当从任意的构形$\vec{n}_0$开始时，在时刻$t+\tau$总会到达构形$\vec{n}=\vec{n}_0+\vec{k}$，则

$$\sum_{\{\vec{k}\}}p_{t+\tau,t}(\vec{n}_0+\vec{k},\ \vec{n}_0)$$

$$\equiv\sum_{\{\vec{n}\}}p_{n_0,t}(\vec{n};\ t+\tau)=1 \qquad (3.10)$$

成立。其中在$\{\vec{k}\}$上的取和包括所有可能的整数$\{k_{\alpha i}\}$，在此$-\infty<k_{\alpha i}<\infty$。

再者，条件概率$p(\vec{n};\ t+\tau)$是由时刻t所有具有概率$p(\vec{n}+\vec{k};\ t)$的构形$\vec{n}+\vec{k}$转移产生的，它应遵守

$$p(\vec{n};\ t+\tau)$$

$$=\sum_{\{\vec{k}\}}p_{t+\tau,t}(\vec{n},\ \vec{n}+\vec{k})\ p(\vec{n}+\vec{k};\ t) \qquad (3.11)$$

因为$p(\vec{n};\ t)$与$p(\vec{n};\ t+\tau)$有联系，所以(3.11)确定了概率分布$p(\vec{n};\ t)$随时间的变化。

现在作一个关键性的假定：条件概率(3.9)在$\vec{k}\neq 0$时与无穷小量τ成正比：

$$\lim_{\tau\to 0} p_{t+\tau,t}(\vec{n}_0+\vec{k},\vec{n}_0) = \tau\omega_t(\vec{n}_0+\vec{k},\vec{n}_0)$$

$$\equiv \tau\omega_t[\vec{k},\ \vec{n}_0] \qquad (3.12)$$

但当$\vec{k}=0$时，由(3.10)和(3.12)得到

$$\lim_{\tau\to 0} p_{t+\tau,t}(\vec{n}_0,\ \vec{n}_0) = 1-\sum_{\{\vec{k}\}\neq\{0\}} \tau\omega_t(\vec{n}_0+\vec{k},\vec{n}_0) \qquad (3.13)$$

$\omega_t(\vec{n}_0+\vec{k},\ \vec{n}_0)$表示单位时间从构形$\vec{n}_0$到$\vec{n}_0+\vec{k}$的转移概率。

将(3.12)和(3.13)代入(3.11)，然后将(2.9)推广为与(1.16)相一致的基本主方程便得

$$\frac{dp(\vec{n};\ t)}{dt} = \lim_{\tau\to 0}\frac{p(\vec{n};\ t+\tau)-p(\vec{n};\ t)}{\tau}$$

$$= \sum_{\{\vec{k}\}}\{\omega_t(\vec{n},\ \vec{n}+\vec{k})p(\vec{n}+\vec{k};\ t)$$

$$-\omega_t(\vec{n}+\vec{k},\ \vec{n})p(\vec{n};\ t)$$

$$\equiv \sum_{\{\vec{k}\}} \{ \omega_t [-\vec{k}, \vec{n}+\vec{k}] p(\vec{n}+ \vec{k}; t) - \omega_t [-\vec{k}, \vec{n}] p(\vec{n}; t) \} \tag{3.14}$$

参看（3.12）式，在末项中的 $\omega_t(\vec{n}+\vec{k}; \vec{n}) = \omega_t [\vec{k}, \vec{n}]$ 用 $\vec{k} = -\vec{k}$ 代替了。取和在所有的 $\vec{k} = \{k_{\alpha i}\}$ 上进行。

我们现在讨论在社会构形之间的转移概率。最重要的是团体 $\mathscr{P}_\alpha$ 中一个成员（或一个集团，比如一个家庭）或 g 个成员从态度 $\vec{i}$ 转变为态度 $\vec{j}$。单位时间的转移概率表示为

$$P_{ji}^{\alpha g}(\vec{n}, \vec{k}) \tag{3.15}$$

一般来说，它们依赖于社会构形 $\vec{n}$ 和趋向参数 $\vec{k}$（例如顺从和偏好参数）。在这里趋向参数暂作常数看待，但也可以作为动力学变量（见第五章）。

如果在 $\mathscr{P}_\alpha$ 中存在具有态度 $\vec{i}$ 的 g 个成员的集团（家庭）$n_{\alpha i}/g$ 个，（3.15）对 $\omega_t [\vec{k}, \vec{n}]$ 的贡献是

$$\omega_{ji}^{\alpha g} [\vec{k}, \vec{n}] = \frac{n_{\alpha i}}{g} P_{ji}^{\alpha g}(\vec{n}, \vec{k})$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}\vec{k}=\{0,\cdots,g_{\alpha}{}^{i},\cdots 0,\ \cdots,\ -g_{\alpha i}\cdots 0\cdots\}\\ \omega_{ji}^{\alpha\alpha}[\vec{k},\ \vec{n}]=0\end{array}\right\}(3.16)$$

对所有其它的 $\vec{k}$

除了在αj和αi位置的整数g和－g外，非零转移概率 $w_{ij}^{\alpha\alpha}$的矢量$\vec{k}$等于零。转移概率（3.16）的守恒数为N_{α}。

另一种转移是一个团体$\mathscr{P}_{\alpha}$中（例如一定的教育或经济水平）g个成员不改变原来的态度$\vec{i}$而进入另一个团体$\mathscr{P}_{\beta}$。其转移概率表示为

$$p_{ig}^{\beta\alpha}(\vec{n},\ \vec{k}) \qquad (3.17)$$

它们对 $\omega_t[\vec{k},\ \vec{n}]$ 的贡献是

$$\left.\begin{array}{l}\omega_{ig}^{\beta\alpha}[\vec{k},\ \vec{n}]=\dfrac{n_{\alpha i}}{g}\,p_{ig}^{\beta\alpha}(\vec{n},\ \vec{k})\\ \text{当}\vec{k}=\{\cdots 0\cdots g_{\beta i}\cdots 0\cdots -g_{\alpha i}\cdots 0\cdots\}\\ \omega_{ig}^{\beta\alpha}[\vec{k},\ \vec{n}]=0\ \text{对其它一切}\vec{k}\end{array}\right\}(3.18)$$

除了在βi和αi位置上的整数g和－g外，非零转移概率 $\omega_{ig}^{\beta\alpha}$的矢量$\vec{k}$等于零。转移概率（3.18）式的守恒数为$N_i$。

最后讨论生和死以及迁入和迁出过程。在单位时间$\mathscr{P}_{\alpha}$中g个具有态度$\vec{i}$的成员的生（或迁入）和死（或迁出）的概率表示为

$$\left.\begin{array}{l} p_{i+}^{\alpha s}\ (\vec{n},\ \vec{k}\ ) \\ p_{i-}^{\alpha s}\ (\vec{n},\ \vec{k}\ ) \end{array}\right\} \qquad (3.19)$$

它们对 $\omega_t\ [\vec{k},\ \vec{n}]$ 的贡献为

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{i+}^{\alpha s}\ [\vec{k},\ \vec{n}] = m_{\alpha i}\ p_{i+}^{\alpha s}(\vec{n},\ \vec{k}) \\ \quad 当\ \vec{k} = \{\cdots 0 \cdots g_{\alpha i} \cdots 0 \cdots\} \\ \omega_{i+}^{\alpha s}\ [\vec{k},\ \vec{n}] = 0 \\ \quad 对其它一切\ \vec{k} \end{array}\right\} \qquad (3.20a)$$

以及

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{i-}^{\alpha s}\ [\vec{k},\ \vec{n}] = n_{\alpha i} p_{i-}^{\alpha s}(\vec{n},\ \vec{k}) \\ \quad 当\ \vec{k} = \{\cdots 0 \cdots -g_{\alpha i} \cdots 0 \cdots\} \\ \omega_{i-}^{\alpha s}\ [\vec{k},\ \vec{n}] = 0 \\ \quad 对其它一切\ \vec{k} \end{array}\right\} \qquad (3.20b)$$

对“生”的过程来说，$m_{\alpha i}$ 与母亲人数（$\sim n_{\alpha i}$）成正比；在迁入的情况下，$m_{\alpha i}$ 是 αi 类的迁入数。除了 αi 位置的整数 g 和 $-g$ 外，非零转移概率 $\omega_{i+}^{\alpha s}$ 和 $\omega_{i-}^{\alpha s}$ 的矢量 $\vec{k}$ 等于零。对于生死过程来说，N_i 和 N_α 都不守恒，因为它描写的社会及其团体可以增加或减少。这取决于模型的 $\omega_t\ [\vec{k},\ \vec{n}]$ 是否是（3.16—20）的所有贡献之和，即能否忽略其中的一部分。

在一般情况下，社会构形之间转移概率的完整公式是

$$\omega_t\left[\vec{k},\ \vec{n}\right] = \sum_{j,i,g}\sum_{\alpha}\omega_{ji}^{\alpha g}\left[\vec{k},\vec{n}\right] + \sum_{\beta,\alpha,g}\sum_{i}\omega_{ig}^{\beta\alpha}\left[\vec{k},\ \vec{n}\right] + \sum_{i,\alpha,g}\left\{\omega_{i+}^{\alpha g}\left[\vec{k},\ \vec{n}\right] + \omega_{i-}^{\alpha g}\left[\vec{k},\ \vec{n}\right]\right\} \tag{3.21}$$

指标t表示转移概率本身仍然是时间的函数。例如，当趋向参数是动力学变量(见本章§3)时。

随机方程和福克—普朗克方程

对主方程、随机方程以及福克—普朗克方程都采用Kramers Moyal展开，可以直接得到向前发展的结果。

现在，把$p(\vec{n};\ t)$和$\omega_t\left[\vec{k},\ \vec{n}\right]$看作C个变量$\vec{n}=\{n_{\alpha i}\}$的可微函数。将(3.14)的右边展开(在$\vec{n}$附近对$\vec{n}+\vec{k}$)为泰勒级数的第一项是：

$$\left\{\omega_t\left[-\vec{k},\ \vec{n}+\vec{k}\right]p(\vec{n}+\vec{k};\ t)\right.$$

$$-\omega_t\left[-\vec{k},\ \vec{n}\right] p\left(\vec{n};\ t\right)\}$$

$$=\sum_{S_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{S_c=1}^{\infty}\frac{k_1^{S_1}\cdots k_c^{S_c}}{S_1!\ \cdots S_c!}\cdot\frac{\partial^{S_1}}{\partial n_1^{S_1}}\cdots$$

$$\frac{\partial^{S_c}}{\partial n_c^{S_c}}\left(\omega_t\left[-\vec{k},\ \vec{n}\right]p(\vec{n};\ t)\right) \qquad (3.22)$$

然后引入$S=S_1+S_2+\cdots+S_c$阶矩：

$$m_{S_1\cdots S_c}(\vec{n}_0;\ t)=\sum_{\{\vec{k}\}}k_1^{S_1}\cdots k_c^{S_c}\omega_t\left[\vec{k},\vec{n}_0\right]$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\sum_{\{\vec{k}\}}k_1^{S_1}\cdots k_c^{S_c}\ p_{t+\tau,t}(\vec{n}_0+\vec{k},\vec{n}_0)$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left\langle\left[n_1(t+\tau)-n_{0\,1}(t)\right]^{S_1}\cdots\right.$$

$$\left.\left[n_c(t+\tau)-n_{0\,c}(t)\right]^{S_c}\right\rangle \qquad (3.23)$$

将（3.22）和（3.23）代入（3.14），便导出随机方程：

$$\frac{\partial p(\vec{n};\ t)}{\partial t}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{S!}\sum_{S_1\cdots S_c}^{S_1+\cdots+S_L=S}\frac{s!}{S_1!\ \cdots S_c!}$$

$$\cdot\frac{\partial^{S_1}}{\partial n_1^{S_1}}\cdots\frac{\partial^{S_c}}{\partial n_c^{S_c}}\left(m_{S_1\cdots S_c}(\vec{n};\ t)p(\vec{n};\ t)\right)$$

$$(3.24)$$

进行标度变量的变换

$$x_{\alpha i}=\frac{n_{\alpha i}}{N_0},\quad \Delta x_{\alpha i}=\frac{1}{N_0}\equiv e \tag{3.25}$$

其中N_0是稳定（或准稳定）社会成员的总数。

同样，可引入在C个准连续变量$\vec{x}=\{x_{\alpha i}\}$上的概率分布

$$P(\vec{x};\ t)=N_0^c p(\vec{n};\ t) \tag{3.26}$$

以及归一化条件

$$\sum_{\{\vec{n}\}} p(\vec{n};\ t)=\sum_{\{\vec{x}\}} P(\vec{x};\ t)\Delta x_1\cdots\Delta x_c$$

$$\doteq\int_0^\infty P(\vec{x};\ t)d^c x=1 \tag{3.27}$$

实际上，$\omega_t[\vec{k},\ \vec{n}]$是由与$n_{\alpha i}=N_0 x_{\alpha i}$成正比的项组成，因此可用变换：

$$m_{s_1\cdots s_c}(\vec{n};\ t)=N_0 M_{s_1\cdots s_c}(\vec{x};\ t) \tag{3.28}$$

表示。那么，随机方程便可写为

$$\frac{\partial P(\vec{x};\ t)}{\partial t}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s e^{s-1}}{S!}\sum_{s_1\cdots s_c}^{s_1+\cdots+s_c=s}\frac{S!}{s_1!\cdots s_c!}$$

$$\cdot\frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{s_1}}\cdots\frac{\partial^{s_c}}{\partial x_c^{s_c}}[M_{s_1\cdots s_c}(\vec{x};\ t)p(\vec{x};\ t)]$$

$$\tag{3.29}$$

因此，福克—普朗克方程便是随机方程（3.29）忽略了S≥3的项的近似方程，在$N_0 \gg 1$或$\varepsilon \ll 1$的情况下它是正确的。当S≥3时，如果矩(3.28)正好等于零，则福克—普朗克方程是一个精确方程。

为了方便起见，现在仅用1到C的单指标 i 代替αi来写社会构形的分量。进一步引入一阶矩和二阶矩的表示式：

$$K_i(\vec{x}_0;\ t) = \varepsilon \sum_{\{\vec{k}\}} k_i \omega_t[\vec{k},\ \vec{n}_0]$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \langle [x_i(t+\tau) - x_{0i}(t)] \rangle \qquad (3.30)$$

$$Q_{ij}(\vec{x}_0;\ t) = \varepsilon \sum_{\{\vec{k}\}} k_i k_j \omega_t[\vec{k},\ \vec{n}_0]$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} N_0 \langle [x_i(t+\tau) - x_{0i}(t)]$$

$$[x_j(t+\tau) - x_{0j}(t)] \rangle \qquad (3.31)$$

$\partial/\partial x_i$可写作∂_i。因此便从（3.29）导出了社会构形的福克—普朗克方程

$$\frac{\partial P(\vec{x};\ t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{c} \partial_i [K_i(\vec{x};\ t) p(\vec{x};\ t)]$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^{c} \partial_i \partial_j [Q_{ij}(\vec{x};\ t) p(\vec{x};\ t)]$$

$$= -\sum_{i=1}^{c} \partial_i I_i(\vec{x};\ t) \qquad (3.32)$$

其中

$$I_i(\vec{x};\ t) = K_i(\vec{x};\ t)P(\vec{x};\ t)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{c} \partial_i[Q_{ij}(\vec{x};\ t)P(\vec{x};\ t)] \qquad (3.33)$$

是概率流分量。一般来说，$K_i(\vec{x};\ t)$和$Q_{ij}(\vec{x};\ t)$是时间的函数。

关于具有含时系数的福克—普朗克方程的求解方法已经有了进一步的发展。

如果趋向参数是常数，则漂移系数$K_i(\vec{x})$和涨落系数$Q_{ij}(\vec{x})$便与时间无关。形如（3.32）的常系数福克—普朗克方程的求解方法已经在统计物理学和协同学中讨论过了。

往往还要用到其它形式的福克—普朗克方程。如写为下面的形式

$$\frac{\partial P(\vec{x};\ t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{c} \partial_i \varepsilon L_{ij}(\vec{x})\left[\partial_j p(\vec{x};\ t) - \frac{P(\vec{x};\ t)}{W(\vec{x})}\partial_j W(\vec{x})\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{c} \partial_i j_i(\vec{x};t) \qquad (3.34)$$

其流

$$J_i(\vec{x};t) = \sum_{j=1}^{c} \varepsilon L_{ij}(\vec{x}) \left[\frac{P(\vec{x};t)}{W(\vec{x})} \partial_j W(\vec{x}) - \partial_j P(\vec{x};t) \right] \qquad (3.35)$$

这里的$W(\vec{x})$是一个正定函数，$L_{ij}(\vec{x})$是所谓的迁移系数。在社会系统中，在时间反演时这些量的符号不变。迁移系数构成一个正定对称矩阵

$$L_{ij}(\vec{x}) = L_{ji}(\vec{x}) \qquad (3.36)$$

令概率分布$P(\vec{x};t)$等于$W(\vec{x})$，则（3.34）和（3.35）的右边等于零。即$P(\vec{x};t) \Longrightarrow W(\vec{x})$时

$$J_i(\vec{x};t) \Longrightarrow 0, \quad \frac{\partial P(\vec{x};t)}{\partial t} \Longrightarrow 0 \qquad (3.37)$$

函数$W(\vec{x})$还是形如（3.34）的福克—普朗克方程的定态解。为方便起见，常将$W(\vec{x})$写为

$$W(\vec{x}) = \exp\left[\varepsilon^{-1}\Psi(\vec{x})\right] \qquad (3.38)$$

如果将方程（3.32）和（3.34）右边的$P(\vec{x};\ t)$、$\partial_i P(\vec{x};\ t)$和$\partial_i\partial_j P(\vec{x};\ t)$的系数进行比较，福克—普朗克方程的两种形式之间的关系就清楚了。如果

$$Q_{ij}(\vec{x}) = Q_{ji}(\vec{x}) = 2L_{ij}(\vec{x}) \qquad (3.39)$$

和

$$K_i(\vec{x}) = \frac{1}{W(\vec{x})}\sum_{j=1}^{c}\partial_j\left(\varepsilon L_{ij}(\vec{x})\,W(\vec{x})\right) \qquad (3.40)$$

成立时，方程（3.32）和（3.34）便是等效的。在这种情况下的概率流也相等：

$$I_i(\vec{x};\ t) = J_i(\vec{x};\ t) \qquad (3.41)$$

换言之，在福克—普朗克方程（3.34)和流(3.35）中采用了涨落系数$Q_{ij}(\vec{x})$的（3.39）式和漂移系数$K_i(\vec{x})$的（3.40）式就得到标准形式（3.32）式和(3.33)式。但是，涨落系数和漂移系数的(3.39）和（3.40）式是遵从细致平衡条件的，所以它不代表普遍情况。将（3.38）和（3.39）代入（3.40）便很容易看出这点。

$$K_i(\vec{x}) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{c}\partial_i Q_{ji}(\vec{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{c} Q_{ji}$$

$$(\vec{x})\,\partial_i\Psi(\vec{x}) \qquad (3.42)$$

在$Q_{ji}(\vec{x})$具有逆矩阵时可求出$\partial_i\Psi(\vec{x})$。利用

$$\sum_{j=1}^{c} Q_{kj}^{(-1)}(\vec{x})Q_{ji}(\vec{x}) = \delta_{ki} \qquad (3.43)$$

便从（3.42）得到

$$\partial_k\Psi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{c} Q_{kj}^{(-1)}(\vec{x})$$

$$\left[2K_j(\vec{x}) - \varepsilon\sum_{i=1}^{c}\partial_i Q_{ji}(\vec{x})\right]$$

$$(3.44)$$

最后将关系式

$$\partial_l\partial_k\Psi(\vec{x}) = \partial_k\partial_l\Psi(\vec{x}) \qquad (3.45)$$

用到（3.44）便得到$K_j(\vec{x})$和$Q_{ij}(\vec{x})$自行满足的细致平衡的条件

$$\partial_l\sum_{j=1}^{c} Q_{kj}^{(-1)}(\vec{x})\left[2K_j(\vec{x})\right.$$

$$-\varepsilon\sum_{j=1}^{c}\partial_i Q_{ij}(\vec{x})\Big]$$

$$=\partial_k\sum_{j=1}^{c}Q_{ij}^{(-1)}(\vec{x})$$

$$\Big[2K_j(\vec{x})-\varepsilon\sum_{i=1}^{c}\partial_i Q_{ji}(\vec{x})\Big] \qquad (3.46)$$

反之亦然。当且仅当$K_i(\vec{x})$和$Q_{ij}(\vec{x})$满足与(3.44)的$\Psi(\vec{x})$的可积性条件等效的细致平衡条件(3.46)时，标准的福克—普朗克方程可化为(3.34)的形式。如果(3.46)成立时，通过积分(3.44)(并使用(3.36)—(3.43)式)便可得到$\Psi(\vec{x})$和$W(\vec{x})$，福克—普朗克方程便可化为(3.34)的形式。此外还需说明，涨落系数$Q_{ij}(\vec{x})$和漂移系数$K_i(\vec{x})$不一定满足细致平衡条件，所以(3.32)和(3.34)代表着比较普遍的情况。

在社会模型中，福克—普朗克方程描述的系统往往不满足细致平衡条件(第四章)。满不满足细致平衡条件的系统在特性上的差别是：满足细致平衡条件时定态概率流的每个分量分别为零，参看(3.37)和(3.41)。

$$I_i^{st}(\vec{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots C$$

不满足细致平衡的系统，至少有几个定态流的分量一定不为零，即

$$I_i^{st}(\vec{x}) \neq 0 \quad \text{对某些 } i = 1, \cdots, C \tag{3.47}$$

当然定态流条件

$$\sum_{i=1}^{c} \partial_i I_i^{st}(\vec{x}) = 0 \tag{3.48}$$

总是被满足的，因为它是从福克—普朗克方程的定态形式（3.32）导出的。

朗之万方程和福克—普朗克方程*

我们已经看到，在定量社会学唯象方法中的关键量是社会构形中的各个转移概率（3.15，17，19）。因而，在本章§2.1和§2.2中讨论的直接与转移概率有关的概率分布的运动方程（主方程、随机方程和福克—普朗克方程）是基本的数学步骤。另外，在第一章中已经用朗之万方程描述了单个取样社会的社会构形的径迹$\vec{x}(t)$。现在讨论一下朗之万方程和福克—普朗克方程的关系。我们先从社

会构形变量 $\{x_i(t)\}$（显然对具体局势还包括 $\{\dot{y}_i(t)\}$）的朗之方方程

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = k_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{c} g_{ij}(\vec{x})\,\xi_j(t)$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ C \qquad (3.49)$$

开始讨论。除了作了一些有关涨落力性质的假定之外，涨落力的微观过程是不知道的。在此引入涨落力的r阶联合概率

$$p_r(\xi_1, \cdots, \xi_r; t_1, \cdots, t_r)\, d\tau(\xi_1)\cdots d\tau(\xi_r) \qquad (3.50)$$

它用来寻求在时刻 t_α $(\alpha = 1, 2, \cdots r)$ 在间隔 $d\tau_\alpha(\xi_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, r)$ 的涨落力 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_c)$。显然，在时间 $t_1, \cdots, t_r$ 中函数 $f(\xi_1, \cdots, \xi_r)$ 对 $\xi_1, \cdots \xi_r$ 的平均值为

$$\langle f(\xi_1(t_1), \cdots, \xi_r(t_r))\rangle = \int f(\xi_1, \cdots, \xi_r) P_r(\xi_1, \cdots, \xi_r; t_1, \cdots, t_r)\, d\tau_1(\xi_1)\cdots d\tau_r(\xi_r) \qquad (3.51)$$

尤其涨落力的S阶多时矩或关联函数定义为

$$\vec{\mu}_s(t_1 \cdots, t_s) \equiv \{\mu_s(i_1, \cdots, i_s; t_1, \cdots t_s)\}$$

$$= \{ \langle \xi_{i_1}(t_1) \cdots \xi_{i_s}(t_s) \rangle \} \tag{3.52}$$

以及特性函数为

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_r(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r; t_1, \cdots, t_r) \\ &= \langle \exp\{ i[\vec{u}_1\xi(t_1) + \cdots \\ &\quad + \vec{u}_r\xi(t_r)] \} \rangle \end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

其中

$$\vec{u}_\alpha\xi(t_\alpha) \equiv \sum_{j=1}^{c} u_{\alpha j}\xi_j(t_\alpha)$$

以上函数可用两种方法展开；既可展开为泰勒级数；

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_r(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r; t_1, \cdots t_r) \\ &= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{S!} \sum_{\alpha, \cdots, \omega=1}^{r} \\ &\quad \vec{\mu}_s(t_\alpha \cdots t_\omega)\vec{u}_\alpha \cdots \vec{u}_\omega \end{aligned}\right\} \tag{3.54}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\mu}_s(t_\alpha \cdots t_\omega)\vec{u}_\alpha \cdots \vec{u}_\omega \\ &\equiv \sum_{i_1 \cdots i_s}^{c} \mu(i_1, \cdots, i_s; t_\alpha, \\ &\cdots, t_\omega)u_{\alpha i_1} \cdots u_{\omega i_s} \end{aligned}\right\}$$

或写成

$$\Theta_r(\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_r; t_1, \cdots, t_r)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&= \exp\left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^{*}}{S!} \sum_{\alpha,\cdots\omega=1}^{r} \right. \\
&\left. \vec{k}_s(t_\alpha,\cdots,t_\omega)\vec{u}_\alpha\cdots\vec{u}_\omega \right\} \\
&\text{和} \\
&\vec{k}_s(t_\alpha,\cdots t_\omega)\vec{u}_\alpha\cdots\vec{u}_\omega \\
&= \sum_{i_1\cdots i_s}^{c} k_s(i_1,\cdots,i_s;\ t_\alpha \\
&\cdots t_\omega)\, u_{\alpha i_1}\cdots u_{\omega i_s}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.55)
$$

同时在（3.55）中也定义了S阶累积量

$$
\vec{k}_s(t_1,\cdots,t_s) = \left\{ k_s(i_1, \cdots, i_s;\ t_1, \cdots t_s) \right\} \qquad (3.56)
$$

比较（3.54）和（3.55）便可验证，S阶矩(3.52)可表示为1到S阶的累积量，反之亦然。第一和第二阶矩和累积量的关系是：

$$
k_1(i;\ t) = \mu_1(i;\ t) = \langle \xi_i(t) \rangle \qquad (3.57)
$$

$$
\begin{aligned}
k_2(i_1, i_2;\ t_1, t_2) &= \mu_2(i_1, i_2;\ t_1, t_2) - \mu_1(i_1, ;\ t_1)\mu_1(i_2;\ t_2) \\
&= \langle [\xi_{i_1}(t_1) - \langle \xi_{i_1}(t_1) \rangle] \\
&\quad [\xi_{i_2}(t_2) - \langle \xi_{i_2}(t_2) \rangle] \rangle
\end{aligned} \qquad (3.58)
$$

假定涨落力 $\xi_i(t)$具有除$k_2(t_1, t_2)$外所有累积量等于零的性质：

$$\left.\begin{aligned} k_1(i;t) &\equiv \langle \xi_i(t) \rangle = 0 \\ k_s(i_1, \cdots i_s; t_1, \cdots, t_s) &= 0 \\ S &= 3,\ 4,\ \cdots,\ \infty \end{aligned}\right\} \qquad (3.59)$$

因而特性函数具有高斯函数的型式：

$$\Theta_r(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r; t_1, \cdots, t_r) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \vec{k}_2(t_\alpha, t_\beta)\vec{u}_\alpha\vec{u}_\beta \right] \qquad (3.60)$$

方程（3.51）和（3.53）表明，$p_r(\xi_1, \cdots, \xi_r; t_1, \cdots, t_r)$和特性函数$\Theta_r(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r; t_1, \cdots, t_r)$互为傅里叶变换。因为高斯函数的傅里叶变换仍是高斯函数，因此便得到多变量高斯联合概率$p_r(\xi_1, \cdots, \xi_r; t_1, \cdots, t_r)$。所以满足（3.59）的涨落力表示了“高斯过程”或高斯涨落力。

此外，若二阶累积量的公式是

$$k_2(i, j; t_1, t_2) = \delta_{ij}\delta(t_1 - t_2) \qquad (3.61)$$

$\xi_i(t)$是δ关联的高斯涨落（或随机）力。方程（3.61）意味着在不同时刻$t_1 \neq t_2$的随机力之间几乎没有关联，并且随机力的分量$\xi_i(t)$和$\xi_j(t)$

之间也没有关联。至少可从（3.59）和（3.61）的微观动力学作出涨落 $\xi_i(t)$ 的具体近似表示式。现在已经找到了朗之万方程（3.49）〔假设δ关联的高斯随机力遵守（3.59）和（3.61）〕和随机方程（3.29）的关系。现在方程中的基本量是矩，请看（3.23）和（3.28），

$$\varepsilon^{s-1}M_{s_1\cdots s_c}(\vec{x}_0;\ t)=\varepsilon^s m_{s_1\cdots s_c}(\vec{n}_0;\ t)$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\langle\Delta_1^{s_1}(\tau)\cdots\Delta_c^{s_c}(\tau)\rangle$$

$$s=s_1+s_2+\cdots+s_c \qquad (3.62)$$

缩写符号

$$\Delta_i(\tau)=[x_i(t+\tau)-x_{0i}(t)] \qquad (3.63)$$

现在从朗之万方程（3.49）计算这些矩。将朗之万方程展开为泰勒级数后最终变为在小时间间隔〔t, $t+\tau$〕上求和的形式：

$$k_j(\vec{x}(t+\tau'))=\sum_{s_1\cdots s_c=0}^{\infty}\frac{\Delta_1^{s_1}(\tau')\cdots\Delta_c^{s_c}(\tau')}{s_1!\cdots s_c!}\partial_1^{s_1}\cdots\partial_c^{s_c}k_j(\vec{x}_0(t)) \qquad (3.64)$$

以及

$$g_{ij}(\vec{x}(t+\tau')) = \sum_{s_1\cdots s_c=0}^{\infty} \frac{\Delta_1^{s_1}(\tau')\cdots\Delta_c^{s_c}(\tau')}{s_1!\cdots s_c!}\partial_1^{s_1}\cdots\partial_c^{s_c} g_{ij}(\vec{x}_0(t)) \tag{3.65}$$

从（3.49）导出：

$$\begin{aligned}\Delta_i(\tau) &= \int_t^{t+\tau} \frac{dx_i(t+\tau)}{d\tau'}\, d\tau' \\ &= \sum_{s_1\cdots s_c=0}^{\infty} \frac{\partial_1^{s_1}\cdots\partial_c^{s_c} k_i(\vec{x}_0(t))}{s_1!\cdots s_c!} \\ &\quad \int_t^{t+\tau} \Delta_1^{s_1}(\tau')\cdots\Delta_c^{s_c}(\tau')d\tau' \\ &\quad + \sum_{j=1}^{c}\sum_{s_1\cdots s_c=0}^{\infty} \frac{\partial_1^{s_1}\cdots\partial_c^{s_c} g_{ij}(\vec{x}_0(t))}{s_1!\cdots s_c!} \\ &\quad \int_t^{t+\tau} \Delta_1^{s_1}(\tau')\cdots\Delta_c^{s_c}(\tau')\xi_j(t+\tau')d\tau'\end{aligned} \tag{3.66}$$

可以用迭代法提高 $\Delta_i(\tau)$ 的精确度。在右边代入n级近似$\Delta_{(n)}\,j(\tau')$后便从（3.66）得到（n+1）级

近似值 $\Delta_{(n+1)i}(\tau)$。从零级$\Delta_{(0)i}(\tau)=0$开始计算得到的一级近似和二级近似为

$$\Delta_{(1)i}(\tau)=k_i(\vec{x}_0(t))\int_t^{t+\tau}d\tau'+\sum_{j=1}^{c}g_{ij}(\vec{x}_0(t))\int_t^{t+\tau}\xi_j(t+\tau)d\tau' \tag{3.67}$$

和

$$\Delta_{(2)i}(\tau)=\sum_{s_1\cdots s_c=0}^{\infty}\frac{\partial_1^{s_1}\cdots\partial_c^{s_c}k_i(\vec{x}_0(t))}{S_1!\cdots S_c!}\int_t^{t+\tau}\Delta_{(1),1}^{s_1}(\tau')\cdots\Delta_{(1),c}^{s_c}(\tau')d\tau'$$

$$+\sum_{j=1}^{c}\sum_{s_1\cdots s_c=0}^{\infty}\frac{\partial_1^{s_1}\cdots\partial_c^{s_c}g_{ij}(\vec{x}_0(t))}{S_1!\cdots S_c!}\int_t^{t+\tau}\Delta_{(1),1}^{s_1}(\tau'')\cdots\Delta_{(1),c}^{s_c}(\tau'')\xi_j(t+\tau'')d\tau'' \tag{3.68}$$

最后，将精确到n级的$\Delta_i(\tau)$代入定义式(3.62)，在$\tau\to 0$时取极限便得到各阶矩。经过稍为冗长计算

后，便得到了很好的高度近似的结果，仅在第一和第二阶矩$\langle\Delta_i(\tau)\rangle$和$\langle\Delta_i(\tau)\Delta_j(\tau)\rangle$中含有同$\tau$成正比的项，而高阶矩中只有$\tau\to 0$时有较高阶项的贡献。从二级近似的（3.68）式中得到了$\langle\Delta_i(\tau)\rangle$中有关$\sim\tau$的项和$\langle\Delta_i(\tau)\Delta_j(\tau)\rangle$。从(3.61)，(3.62)和（3.68）得到的有关项是

$$\langle\Delta_i(\tau)\rangle = k_i(\vec{x}_0(t))\int_t^{t+\tau} d\tau'$$

$$+\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{c}\partial_k g_{ij}(\vec{x}_0(t))\sum_{l=1}^{c} g_{kl}(\vec{x}_0(t))$$

$$\int_t^{\tau+t} d\tau''\int_t^{t+\tau''} d\tau'\langle\xi_l(t+\tau')\xi_j(t+\tau'')\rangle$$

$$=\tau k_i(\vec{x}_0)+\frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{c}[\partial_k g_{ij}$$

$$(\vec{x}_0)]\, g_k(\vec{x}_0) \qquad (3.69)$$

和

$$\langle\Delta_i(\tau)\Delta_k(\tau)\rangle$$

$$=\sum_{j=1}^{c}\sum_{l=1}^{c} g_{ij}(\vec{x}_0(t)g_{kl}(\vec{x}_0(t))$$

$$\int_t^{t+\tau} d\tau' \int_t^{t+\tau} d\tau'' \langle \xi_i(t+\tau')\xi_l(t+\tau'') \rangle$$

$$= \tau \sum_{j=1}^{c} g_{ij}(\vec{x}_0) g_{kj}(\vec{x}_0) \qquad (3.70)$$

使用定义（3.30）和（3.31)式，便从方程(3.69）和（3.70）导出漂移系数和涨落系数

$$K_i(\vec{x}) = k_i(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{c} [\partial_k g_{ij}(\vec{x})]$$

$$g_{kj}(\vec{x}) \qquad (3.71)$$

和

$$\varepsilon Q_{iA}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{c} g_{ij}(\vec{x}) g_{ki}(\vec{x}) \qquad (3.72)$$

但随机方程的高阶矩等于零：

$$\varepsilon^{s-1} M_{s_1 \cdots s_c}(\vec{x}) = 0, \quad 当 s = s_1 + \cdots s_c \geqslant 3 \qquad (3.73)$$

（3.71）—（3.73）的结果表明，可从带有高斯δ关联随机力的朗之万方程（3.49）直接导出福克—普朗克方程（3.32）。

反之亦然，假如$g_{ij}(\vec{x})$是一个正定矩阵，就可

以从（3.71）和（3.72）式反过来由 $\varepsilon Q_{ij}(\vec{x})$和$K_i(\vec{x})$确定$g_{ij}(\vec{x})$和$k_i(\vec{x})$了。

从这个意义上看，福克——普朗克方程(3.32)和朗之万方程（3.49）是等效的。

尽管“高斯δ关联噪声”是对涨落系统的一种合理的假定，然而社会系统中的宏观变量会受到非高斯型的更复杂时间关系的涨落力的作用。在这种情况下，朗之万方程仍然是恰当的，然而概率分布$P(\vec{x};\ t)$要遵守比（3.32）更复杂的方程，比如主方程或一般的随机方程（3.29）。

近似平均值方程

前边含有随机力和概率分布的运动方程，并不能预测个别人的决策或行动，只能得出整个系统的运动趋向。但在多维时很难求解这类方程，因此建立和求解它的平均值方程往往显得简单而有效。

如果原方程是（3.32）的福克——普朗克方程，我们可用第二章的推导步骤导出闭合的平均值方程组

$$(x_i)_t = \int_0^\infty x_i P(\vec{x};\ t)d^n x \qquad (3.74)$$

以及偏差

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj} = \langle (x_j - \langle x_j \rangle_t)(x_k - \langle x_k \rangle_t) \rangle_t$$

$$= \langle x_j x_k \rangle_t - \langle x_j \rangle_t \langle x_k \rangle_t$$

其中

$$\langle x_j x_k \rangle_t = \int_0^\infty x_j x_k P(\vec{x};\ t) d^c x \qquad (3.75)$$

我们假定，$P(\vec{x};\ t)$及其微商$\partial_j P(\vec{x};\ t)$在它定义的边界上小到可忽略的程度。因此就可忽略积分中的边界项。如果对所有的$j = 1, \cdots, c$，当$x_j \to \infty$时，由于要满足归一化条件，所以$P(\vec{x};\ t) = 0$，只要分布$P(\vec{x};\ t)$中心处值$x_j = n_j/N_0$，且$n_j \gg 1$时，这个假定是正确的。再者，现在用从 1 到 C出现两次的符号上取和的办法。

利用关系式（3.32）和（3.33），在分部积分后得到了$\langle x_k \rangle_t$的运动方程：

$$\frac{d\langle x_k \rangle_t}{dt} = \int_0^\infty x_k \frac{\partial P(\vec{x};\ t)}{\partial t} d^c x$$

$$= -\int_0^\infty x_k \partial_j I_j(\vec{x};\ t) d^c x$$

$$= \int_0^\infty I_k(\vec{x}, t)d^c x = \int_0^\infty K_k(\vec{x})p(\vec{x}, t)d^c x$$

$$= \langle K_k(\vec{x})\rangle_t \qquad (3.76)$$

在单模分布情况下，从精确方程（3.76）导出中心$\langle\vec{x}\rangle_t$附近的近似闭合方程

$$\frac{d\langle x_k\rangle_t}{dt} \doteq K_k(\langle\vec{x}\rangle_t) \qquad (3.77)$$

通过类似的方式得到

$$\frac{d\langle x_i x_k\rangle_t}{dt} = -\int_0^\infty x_i x_k \partial_i I_i(\vec{x}, t)d^c x$$

$$= \int_0^\infty [x_k I_i(\vec{x}, t) + x_i I_k(\vec{x}, t)]d^c x$$

$$= \langle x_k K_i(\vec{x})\rangle_t + \langle x_i K_k(\vec{x})\rangle_t + \varepsilon\langle Q_{ik}(\vec{x})\rangle_t \qquad (3.78)$$

在$\langle\vec{x}\rangle_t$附近展开（3.78）式中的$K_i(\vec{x})$和$K_k(\vec{x})$

$$\langle x_k K_i(\vec{x})\rangle_t = \langle x_k\rangle_t K_i(\langle\vec{x}\rangle_t) + \langle x_k(x_i - \langle x_i\rangle_t)\rangle_t \partial_i K_i(\langle x\rangle_t)$$

$$= \langle x_k\rangle_t K_i(\langle x\rangle_t) + \sigma_{ki}(t)\partial_i K_i(\langle\vec{x}\rangle_t) \qquad (3.79)$$

象（3.77）一样用$\langle Q_{ik}(\vec{x})\rangle_t \doteq Q_{ik}(\langle\vec{x}\rangle_t)$，便得到了$\sigma_{ik}(t)$运动的近似方程，在单模分布时是

$$\frac{d\sigma_{ik}(t)}{dt} \doteq \varepsilon Q_{ik}(\langle\vec{x}\rangle_t) + \sigma_{ik}(t)\partial_i K_i(\langle\vec{x}\rangle_t) + \sigma_{ij}(t)\partial_i K_k(\langle\vec{x}\rangle_t) \qquad (3.80)$$

如果通过求解（3.77）知道了$\langle x_k\rangle_t$，则方程（3.80）是一个带有给定含时偏差矩阵$\sigma_{ik}(t)$的非齐次线性微分方程组。

只要不是多模分布，便可从近似方程（3.77）和（3.80）得到平均值的径迹。

精确平均值方程*

现在推导概率分布$P(\vec{x};\ t)$的平均值$\langle\vec{x}\rangle_t$的闭合的精确的方程。精确的平均值方程具有比方程（3.77）还要复杂的结构，在计算上要困难一些。

我们先把福克—普朗克方程和它的形式解写成抽象的形式：

$$\left.\begin{aligned}&\partial_t P(\vec{x};\ t) = \mathcal{L}P(\vec{x};\ t)\\&\partial_t = \partial/\partial t\end{aligned}\right\} \qquad (3.81)$$

及形式解

$$\mathbf{P}(\vec{x};\ t) = \exp(\mathcal{L}t)\mathbf{P}(\vec{x};\ 0) \qquad (3.32)$$

在标积中的平均值及其时间微分是

$$\langle f(\vec{x})\rangle_t = \int_0^\infty d^n x P(\vec{x};\ t) f(x) \equiv (P\,|\,f) \qquad (3.33)$$

$$\partial_t \langle f(\vec{x})\rangle_t = \int_0^\infty d^n x \partial_t P(\vec{x};\ t)\ f(\vec{x})$$

$$= (\mathcal{L}P|\,f) = (P|\,\mathcal{L}^+ f) \qquad (3.34)$$

其中$\mathcal{L}$是福克——普朗克算子，用散和变换写为

$$\mathcal{L}F(\vec{x}) = [-\partial_i K_i(\vec{x}) + \frac{\varepsilon}{2}\partial_i\partial_j Q_{ij}(\vec{x})]F(\vec{x})$$

$$= \partial_i\left[\varepsilon L_{ij}(\vec{x})\partial_j - \varepsilon\left(\frac{\partial_j W(\vec{x})}{W(\vec{x})} - \right) L_{ij}(\vec{x})\right]F(\vec{x})$$

$$(3.35)$$

和它的共轭算子$\mathcal{L}^+$

$$\mathcal{L}^+ F(\vec{x}) = [K_i(\vec{x})\partial_i + \frac{\varepsilon}{2} Q_{ij}(\vec{x})\partial_i\partial_j]F(\vec{x})$$

$$= \varepsilon\left[\partial_i L_{ij}(\vec{x}) + L_{ij}(\vec{x})\left(\frac{\partial_j W(\vec{x})}{W(\vec{x})}\right)\right]\partial_i F(\vec{x})$$

$$(3.36)$$

再者，所谓“相关”分布$\overline{P}(\vec{x};\ \lambda(t))$是通过

选择的C个依赖于时间t的参数$\vec{\lambda}(t)=\{\lambda_1(t),\cdots,\lambda_c(t)\}$来决定的。相关分布与(3.81)的精确分布不符，但它必须满足归一化条件

$$\int_0^\infty d^cx\overline{P}(\vec{x};\ \vec{\lambda}(t))\equiv(\overline{P}\mid 1)=1 \qquad (3.87)$$

并且在时间t=0时与精确分布$P(\vec{x};\ t)$相等

$$\overline{P}(\vec{x};\ \lambda(0))=P(\vec{x};\ 0) \qquad (3.88)$$

最重要的是，在所有时间里它与$P(\vec{x};\ t)$具有宏观等效作用，在$\overline{P}$上取$x_1,\cdots,x_c$的平均值与在P上取的精确平均值相等：

$$\langle x_j\rangle_t=(\overline{P}(t)\mid x_j)\equiv\int_0^\infty d^cx\overline{P}(\vec{x};\ \vec{\lambda}(t))x_j$$

$$=\langle x_j\rangle_t=(P(t)\mid x_j)\equiv\int_0^\infty d^cxP(\vec{x};\ t)x_j$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ C \qquad (3.89)$$

方程(3.89)用参数$\{\lambda_1(t),\cdots,\lambda_c(t)\}$表示$\langle x_j\rangle_t$，并可用平均值$\{\langle x_1\rangle_t,\cdots,\langle x_c\rangle_t\}$表示$\lambda_i(t)$。当然，$\overline{P}(\vec{x};\ \lambda(t))$也可看作平均值$\langle x_j\rangle_t$的函数。

第三，建立闭合的精确方程组时，就必须求出它对参数 $\{\lambda_1(t), \cdots, \lambda_\infty(t)\}$ 的平均值。这可用两种计算方法。

$$J_j(t) = \int_0^t \partial_t(\exp(\mathcal{L}s)\overline{P}(t-s)|\mathcal{L}^+x_j)ds \tag{3.90}$$

在上式中从 $s=0$ 计算到 $s=t$ 便得：

$$\begin{aligned} J_j(t) &= (\exp(\mathcal{L}s)P(t-s)|\mathcal{L}^+x_j)\Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= (\mathcal{L}\exp(\mathcal{L}t)P(0)|x_j) - (\overline{P}(t)|\mathcal{L}^+x_j) \\ &= \partial_t\langle x_j\rangle_t - \langle K_j(\vec{x})\rangle_\lambda \end{aligned} \tag{3.91a}$$

这里用了（3.81），（3.82）和 $\mathcal{L}^+x_j = K_j(\vec{x})$。其次，在(3.90)式内的积分号中微商后得到

$$J_j(t) = \int_0^t (\mathcal{L}\overline{P}(t-s) + \partial_s\overline{P}(t-s)]| \exp(\mathcal{L}^+s)K_j)ds \tag{3.91b}$$

（3.91a）和（3.91b）应相等，得：

$$\partial_t\langle x_j\rangle_t = \langle K_j(\vec{x})\rangle_\lambda + \int_0^t (\mathcal{L}\overline{P}(t-s) + \partial_s\overline{P}(t-s)]|$$

$$\exp(\mathcal{L}^{+}s)K_j)ds \qquad (3.92)$$

(3.92)和(3.76)比较得到

$$\partial_t\langle\vec{x}\rangle_t = \langle K_j(\vec{x})\rangle_t$$

是两者的精确方程，由此看出(3.92)的第二项说明$\langle K_j(\vec{x})\rangle_t$和$\langle K_j(\vec{x})\rangle_j$不同，即漂移系数$K_j(\vec{x})$的精确平均值和"相关"平均值是不同的。

方程(3.76)和(3.92)的关键不同是，后者是对$\langle x_j\rangle_t$封闭的非线性积分微分方程组，因为根据$\overrightarrow{P(x,\ \lambda(t))}$的定义知(3.92)的右边仅依赖于$\langle\vec{x}\rangle_{t-s}$，而$0\leqslant s\leqslant t$。

相关分布的一种恰当选择是

$$\overrightarrow{P(x;\ \lambda(t))} = Z^{-1}(\vec{\lambda}(t))\ W(\vec{x})\exp(-\vec{\lambda}_j(t)x_j) \qquad (3.93)$$

这里的$W(\vec{x})$是(3.34)的定态解，$Z(\lambda)$是归一化因子。为了进行选择，接着用(3.85)得

$$\mathcal{L}\overrightarrow{P(x;\ \lambda(t))} = -\lambda_j(t)\partial_i[\varepsilon L_{ij}(\vec{x})\overrightarrow{P(x;\ \lambda(t))}] \qquad (3.94)$$

和

$$\partial_t\overrightarrow{P(x;\ \lambda(t))} = -[\partial_t\lambda_j(t)](x_j-\langle x_j\rangle_j)\overrightarrow{P(x;\ \lambda(t))} \qquad (3.95)$$

将（3.94）和（3.95）代入（3.92）的右边便得平均值的精确运动方程，即

$$\partial_t \langle x_k \rangle_t = \int_0^\infty d^c x \overline{P(\vec{x}, \vec{\lambda}(t))} K_k(\vec{x})$$

$$- \int_0^t ds \int_0^\infty d^c x \{ [\partial_t \varepsilon L_{ij}(\vec{x}) \overline{P(\vec{x}, \vec{\lambda}(t-s))}]$$

$$\lambda_j(t-s) + (\partial_s \lambda_i(t-s))(x_i - \langle x_i \rangle_t)$$

$$\overline{P(\vec{x}, \vec{\lambda}(t-s))} \} \exp(\mathcal{L}^+ s) K_k(\vec{x})$$

（3.96）

对于一般的福克—普朗克方程来说，最近已经建立了（3.96）的方程形式，并且还对几个特殊模进行了计算。

3-3 趋向参数和局势矢量动力学

至今，在社会构形的运动方程中仍未包含社会系统动力学的所有复杂因素。它们仅描述了在某种局势矢量$\vec{y}$和趋向参数$\vec{K}$作用下所引起的集体心理和政治过程的运动（即态度的变化）。在本章§ 2

中，讨论了把$\vec{y}$和$\vec{K}$作为常数或当作时间的慢变函数方程。相应的转移概率（3.12）或漂移和涨落系数（3.30）和（3.31）（通过参数$\vec{y}$和$\vec{K}$)是常数或是时间的慢变函数。

若它们是常数，由主方程（3.14）或福克—普朗克方程（3.32）或（3.34）便可证明（例如通过著名的玻耳兹曼H-定理）所有的分布最终会进入定态分布$W(\vec{x})$。在定态时，取样社会的运动仅由概率尖峰附近的定态涨落引起。这种运动表示一种在稳定心理和局势条件下的“安定社会”。

一般情况应该由社会构形$\vec{x}(t)\in\mathfrak{G}$、局势矢量$\vec{y}(t)\in\mathfrak{G}$和趋向参数$\vec{K}(t)=\{K_1(t),\cdots,K_T(t)\}\in\mathfrak{T}$（其中趋向参数表示为T维趋向空间的诸元素）的相互作用所构成。当通过朗之万方程来讨论它们的耦合时，必须把变量看作

$$\{\vec{x}(t),\ \vec{y}(t),\ \vec{K}(t)\}\in\mathfrak{G}\oplus\mathfrak{G}\oplus\mathfrak{T}=\mathfrak{D} \tag{3.97}$$

现在，动力学变量的整个空间不仅包括局势矢量$\vec{y}(t)$和心理趋向参数$\vec{K}(t)$，而且包括社会构形变量$\vec{x}(t)$。

在此讨论一下$\vec{y}(t)$和$\vec{K}(t)$运动方程的结构问

题。当然在公式中要反映出各种不同情况的社会面貌。

不同影响不同态度的人将“驱动”局势矢量产生运动。因此，$\vec{y}(t)$的时间微商应该由这些竞争作用偏微商的迭加所构成：

$$\frac{dy_i}{dt}=\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)_1+\cdots+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)_n,\ i=1,\cdots,s \tag{3.98}$$

其中每一项表示一种作用。一般来说，它依赖于$\vec{y}(t)$、社会构形$\vec{x}(t)$和某种控制参量的非线性作用。

同样，趋向参数$\vec{K}(t)$的时间微商（它决定着转移概率的公式）表示着趋向于变更局势的心理和政治作用，并且也由具有竞争作用的偏微商的迭加所构成：

$$\frac{dK_l}{dt}=\left(\frac{\partial K_l}{\partial t}\right)_1+\cdots+\left(\frac{\partial K_l}{\partial t}\right)_r$$

$$l=1,\ \cdots,\ T \tag{3.99}$$

偏微商表示各个趋向引起的局势矢量$\vec{y}(t)$的变化，这种变更的趋势将引起社会构形的变更，变更了的社会构形反过来又驱使局势$\vec{y}(t)$进入下一个新的状态，等等。迄今，在（3.98）和（3.99）中忽略了

随机力项，当加上随机力项时就变成了朗之万方程，并且得到了类似于本章§2节对$\vec{x}(t)$的统计描述。有人提议，$\vec{x}(t)\oplus\vec{y}(t)\ominus\vec{K}(t)\in\Omega$的一种多维周期或准周期甚至混沌运动，是具体局势、心理趋向和社会构形的平均时间发展的描述。

诚然，这里也存在着“极限环”或“奇异吸引子”的非线性耦合微分方程系统，其解刚好表现出准周期或混沌的特性。在以后章节中会遇到这种简单的例子。

从局势的长期发展考虑，一种单向运动的长时间迭加会将准周期或准闭合的径迹变为Ω空间中的非闭合的半螺旋形的径迹。（要仔细推敲单向运动的词“前进”和“倒退”的真实含义，我们在此是作为“动力学之类”的判断使用的。）例如，某个单向运动是由政体的发展、“文化积累”（包括技术发展）的发展或自然资源的逐渐耗尽引起的。

最后讨论一下“趋向参数$\vec{K}$的层次”问题，这是唯象理论的共同问题。如果将趋向参数和局势耦合起来建立趋向参数的动力学方程，就必须引入第二级趋向参数，若把后者当作动力学变量，将得到一种无休无止的无穷级耦合；n级趋向参数的动力

学方程将包括（n+1)级趋向参数（n=1,2，…)。当然，必须在适当的n级终止这种无穷级耦合。用唯象的方法时将（n+1）级作为常数处理是可行的。

3-4 社会构形总变量的平均值方程*

首先讨论如何推导社会构形$\{n_{\alpha i}\}$的平均值方程问题。

在主方程(3.14)中引入标度变量（3.25）便导出了随机方程（3.29）和福克—普朗克方程（3.32）。从平均值的精确的非闭合方程和最后的近似闭合方程（3.77）便得到社会构形变量$\tilde{x}_{\alpha i} \equiv \langle x_{\alpha i}\rangle_t$或$\tilde{n}_{\alpha i} \equiv \langle n_{\alpha i}\rangle_t$。如果漂移系数$K_i(\vec{x})$用定义式(3.30)，转移概率$W(\vec{K}, \vec{n})$使用（3.16）或(3.18)或（3.20）式，便得到了具体的平均值$\tilde{n}_{\alpha i}$的方程了。

忽略掉生、死过程，仅考虑态度和团体之间的转移概率（如转移概率$P_{ii}^{\alpha\alpha}$和$P_i^{\beta\alpha}$）描述的过程。为简单起见，令g=1，便得到对应于后面（4.14）

的近似闭合的平均值方程

$$\frac{d\tilde{n}_{ik}}{dt} = \left\{ \sum_{j=1}^{L} \tilde{n}_{kj} P^{\gamma}_{ji}(\tilde{n}, \vec{y}, \vec{K}) - \sum_{j=1}^{L} \tilde{n}_{\gamma k} P^{\gamma}{}_{ik}(\tilde{n}, \vec{y}, \vec{K}) \right\} + \left\{ \sum_{\alpha=1}^{P} \tilde{n}_{\alpha k} P^{\gamma\alpha}_{i}(\tilde{n}, \vec{y}, \vec{K}) - \sum_{\alpha=1}^{P} \tilde{n}_{\gamma k} P^{\alpha\gamma}_{i}(\tilde{n}, \vec{y}, \vec{K}) \right\} \tag{3.100}$$

一般来说，这里的转移概率不仅依赖于社会构形$\tilde{n}$和趋向参数$\vec{K}$，还依赖于局势矢量$\vec{y}$。方程(3.100)右边第一项的守恒数为

$$N_{\alpha} = \sum_{i=1}^{L} n_{\alpha i} \qquad \alpha = 1, 2, \cdots P$$

第二项的守恒数为

$$N_{i} = \sum_{\alpha=1}^{P} n_{\alpha i} \qquad i = 1, 2, \cdots L$$

但若$\tilde{n}_{\gamma i}$在两项影响下变化时，则只有总数

$$N=\sum_{\alpha=1}^{P}\sum_{i=1}^{L}n_{\alpha i}$$

保持守恒。

这个问题叙述为：假设有L种态度和P个团体（其中$L\gg1$，$P\gg1$），共有$C=PL$种社会描述，社会构形变量$\{n_{\alpha i}\}$的平均值$\{\tilde{n}_{\alpha i}\}$仍是“细粒”的复杂变量。因而从（3.100）导出的是几个总变量的平均值方程。

这些总变量应该是C个社会构形变量$\{n_{\alpha i}\}$的函数。虽然社会成员比$\{n_{\alpha i}\}$少，但在研究社会的整体状态时也应慎重进行选择。

假定总变量的普遍形式是

$$G_q=\sum_{i=1}^{L}\sum_{\alpha=1}^{P}g_{\alpha i}^{q}n_{\alpha i} \qquad (3.101)$$

这里的$g_{\alpha i}^{q}$（$q=1,\cdots,Q$）是实系数。也就是说G_q是在具有某种态度的团体的成员上进行适当选择的加权平均数。成员N_α和N_i是总变量的特例。下面举个例子说明总变量（3.101）的含义：在第六章中总变量P_1和P_2是表示在两个相互作用的竞争

的宏观社会φ_i之间从“一致”走向“紧张”的“政治心理状态”的整体状态。如果P_i表示一致（紧张）盛行的正（负）值，显然要选择P_i所定义的权重。例如，正的权重$g^i_{\alpha i}>0$划分态度等级（αi）如“合作”和“支持”，负权重$g^i_{\beta k}$的态度等级（βK）如“好战”和“思想上的武断”。

我们再来讨论如何导出平均值$\overline{Gq}$的非闭合的运动方程。用$g^q_{\gamma k}$乘（3.100）并在γ和K上取和便得

$$\frac{d}{dt}\sum_{\gamma,k}^{p,L} g^q_{\gamma k}\,\tilde{n}_{\gamma k} = -\frac{d}{dt}\tilde{G}q$$

$$= \sum_{\gamma,k}^{p,L} g^q_{\gamma k}\left[\sum_{i=1}^{L}\tilde{n}_{ri}\,P^{\gamma}_{ki}\left(\tilde{\vec{n}},\vec{y},\vec{k}\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{L}\tilde{n}_{\gamma k}P^{\gamma}_{jk}\left(\tilde{\vec{n}},\vec{y},\vec{k}\right)\right]$$

$$+\sum_{\gamma,k}^{p,L} g^q_{\gamma k}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}\tilde{n}_{\alpha k}P^{\gamma\alpha}_{k}\left(\tilde{\vec{n}},\vec{y},\vec{k}\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{\alpha=1}^{p}\tilde{n}_{\gamma k}\,P^{\alpha\gamma}_{k}\left(\tilde{\vec{n}},\vec{y},\vec{K}\right)\right] \qquad (3.102)$$

上式的右边不仅依赖于$\widetilde{G}q$，而且依赖于所有的$\widetilde{n}_{\gamma i}$，从而（3.102）就不闭合了。

为了得到$\widetilde{G}q$的闭合方程，必须做出新的假定和近似。首先假定转移概率P^{γ}_{ki}和$P^{\gamma\alpha}_{li}$是正指数表示式，并且指数上仅保留对$\vec{n}$和$\vec{y}$的泰勒展开式的线性项时：

$$p^{\gamma}_{ki}\left(\vec{n},\vec{y},\vec{K}\right) = \nu\exp\left[\delta\left(\begin{matrix}\gamma\\ki\end{matrix}\right) + \sum_{\beta,j}^{P,L} K\left(\begin{matrix}\gamma\\ki\end{matrix}\middle|\,\beta j\right)n_{\beta i} + \sum_{m}^{s}\sigma\left(\begin{matrix}\gamma\\ki\end{matrix}\middle|\,m\right)y_m\right] \qquad (3.103)$$

和

$$p^{\gamma\alpha}_{li}\left(\vec{n},\vec{y},\vec{K}\right) = \mu\exp\left[\delta\left(\begin{matrix}\gamma\alpha\\li\end{matrix}\right) + \sum_{\beta,j}^{p,L} k\left(\begin{matrix}\gamma\alpha\\li\end{matrix}\middle|\,\beta j\right)n_{\beta i} + \sum_{m}^{s}\sigma\left(\begin{matrix}\gamma\alpha\\li\end{matrix}\middle|\,m\right)y_m\right] \qquad (3.104)$$

这里的系数ν，$\delta\left(\begin{matrix}\gamma\\ki\end{matrix}\right)$，$k\left(\begin{matrix}\gamma\\ki\end{matrix}\middle|\,\beta j\right)$和$\sigma\left(\begin{matrix}\gamma\\ki\end{matrix}\middle|\,m\right)$以及

μ，$\delta\left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ \cdot\end{smallmatrix}\right)$，$k\left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha\\ \cdot\end{smallmatrix}\middle|\beta j\right)$和$\sigma\left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha\\ \cdot\end{smallmatrix}\middle|m\right)$是在此不作进一步解释的趋向参数。

如果总变量近似遵守一种闭合子动力学，转移概率仅通过总变量依赖于$\{n_{\alpha i}\}$，则可取为自洽的形式。这个假定要求特殊选择趋向参数

$$\left.\begin{aligned} k\left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ ki\end{smallmatrix}\middle|\beta j\right) &= \sum_{q=1}^{Q}\omega\left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ ki\end{smallmatrix}\middle|q\right)g^{q}_{\beta j}\\ k\left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha\\ i\end{smallmatrix}\middle|\beta j\right) &= \sum_{q=1}^{Q}\omega\left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha\\ i\end{smallmatrix}\middle|q\right)g^{q}_{\beta j}\end{aligned}\right\} \qquad (3.105)$$

可得

$$p^{\gamma}_{ki}\left(\vec{n},\vec{y},\vec{K}\right)=p^{\gamma}_{ki}\left[\vec{G},\vec{y},\vec{K}\right]$$

$$=\nu\exp\left[\delta\left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ ki\end{smallmatrix}\right)+\sum_{q=1}^{Q}\omega\left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ ki\end{smallmatrix}\middle|q\right)G_q+\sum_{m=1}^{s}\sigma\left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ ki\end{smallmatrix}\middle|m\right)y_m\right] \qquad (3.106)$$

和

$$P^{\gamma\alpha}_{i}\left(\vec{n},\vec{y},\vec{K}\right)=P^{\gamma\alpha}_{i}\left[\vec{G},\vec{y},\vec{K}\right]$$

$$=\mu\exp\left[\delta\left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha\\ i\end{smallmatrix}\right)+\sum_{q=1}^{Q}\omega\left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha\\ i\end{smallmatrix}\middle|q\right)G_q\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{s}\sigma\binom{\gamma\alpha}{i}\Big|\,m\Big)\,y_m\Big] \qquad (3.107)$$

p_{ki}^{γ}和$p_i^{\gamma\alpha}$不仅依赖于$p_{ki}^{\gamma}[\widetilde{G},\vec{y},\vec{K}]$和$p_i^{\gamma\alpha}[\widetilde{G},\vec{y},\vec{K}]$，而且还分别依赖于每个$\widetilde{n}_{\alpha j}$（$\alpha=1,\cdots,P;\ j=1,\cdots,L$），因此还不能导出$\widetilde{G}q$的闭合方程。但只要通过平均值$\widetilde{G}q(t)$的函数就可证明$\widetilde{n}_{\alpha i}(t)=\widetilde{n}_{\alpha i}[\widetilde{G}(t)]$，就可化为近似闭合方程：

$$\frac{d}{dt}\widetilde{G}_q(t)$$

$$=\sum_{\gamma,k}^{P,L}g_{\gamma k}^{q}\Big[\sum_{i=1}^{L}\widetilde{n}_{\gamma i}(\widetilde{G})\,P_{ki}^{\gamma}(\widetilde{G},\vec{y},\vec{K})$$

$$-\sum_{j=1}^{L}\widetilde{n}_{\gamma k}(\widetilde{G})P^{\gamma}{}_{jk}(\widetilde{G},\vec{y},\vec{K})\Big]$$

$$+\sum_{\gamma,k}^{P,L}g_{\gamma k}^{q}\Big[\sum_{\alpha=1}^{P}\widetilde{n}_{\alpha k}(\widetilde{G})\,P_{k}^{\gamma\alpha}(\widetilde{G},\vec{y},\vec{K})$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{P}\widetilde{n}_{\gamma k}(\widetilde{G})\,P_{k}^{\alpha\gamma}(\widetilde{G},\vec{y},\vec{K})\Big] \qquad (3.108)$$

将上式和（3.106）以及（3.107）代入（3.102）便得到总变量平均值$\widetilde{G}q(t)$（$q=1,\cdots,Q$）的约化集合。为了确定函数$\widetilde{n}_{\alpha i}[\widetilde{G}]$，使用了平衡统计

物理中的基本方法来研究社会系统中的突变现象。

显然，社会构形$n_{\alpha i}(t)$应与已知值$G_q(t)$一致，在时刻t的总变量的平均值$\tilde{G}_q(t)$应满足

$$\sum_{\alpha,i}^{P,L} g_{\alpha i}^{q} n_{\alpha i}(t) = \tilde{G}_q(t)$$

$$q = 1, 2, \cdots, Q \qquad (3.109)$$

现在的社会构形$\{n_{\alpha i}\}$是许多微观构形形成的一种宏观构形。微观构形是指各个团体在PL“盒子”中的分布。(α, i)表示团体α和态度i。一种宏观构形$\{n_{\alpha i}\}$所对应的微观构形的数目$M(\{n_{\alpha i}\})$为：

$$M(\{n_{\alpha i}\}) = \frac{N!}{\prod_{\alpha,i}^{P,L} n_{\alpha i}!} \qquad (3.110)$$

再者，与各个微观构形之间的快转移相比，总变量平均值$\tilde{G}_q(t)$只是慢变的时间径迹。这时可以假定，在确定的$\tilde{G}_q(t)$值时在各个微观构形间达到了瞬时平衡的转移。还认为，满足约束条件（3.109）的所有微观构形间的各个转移概率的数量级相同。在这个近似条件下，总变量瞬时平均值$\tilde{G}_q(t)$相等的各种微观构形都有相同的权重。因此，在一定的

$\tilde{G}_\alpha(t)$时，宏观构形$\{n_{\alpha i}\}=\vec{n}$的概率与可实现的微观构形数成正比。即

当$\vec{n}=\{n_{\alpha i}\}$和（3.109）一致时

$$P_G(\vec{n})=\frac{M(\vec{n})}{\sum_{\{\vec{n}\}}^{(G)} M(\vec{n})}$$

当$\vec{n}=\{n_{\alpha i}\}$和(3.109)不一致时

$$P_G(\vec{n})=0 \qquad (3.111)$$

这里对所有宏观构形$n=\{\vec{n}_{\alpha i}\}$的取和$\sum_{\{\vec{n}\}}^{(G)}$范围与（3.109）的相同。

在（3.109）的约束条件下，通过用（3.111）并按照定义

$$\tilde{n}_{\beta k}(t)=\sum_{\{\vec{n}\}} n_{\beta k} P_{G(t)}(\vec{n}) \qquad (3.112)$$

原则上就可以计算的平均值$\tilde{n}_{\alpha i}(t)$。由于概率分布（3.111）依赖于$\tilde{G}_\alpha(t)$，所以社会构形的平均值$\tilde{n}_{\beta k}(t)$就成为总变量平均值$\tilde{G}_\alpha(t)$的函数了。

实际上用这个方法计算平均值（3.112）是很

麻烦的。但幸运的是，在约束（3.109）的条件下，概率分布（3.111）在$\{\hat{n}_{\alpha i}\}$处有一个明显的或陡峭的极大值。因为极大值$P_G(\{n_{\alpha i}\})$的平均值$\tilde{n}_{\beta k}$的陡度（近似的）与$P_G(\{n_{\alpha i}\})$极大值$\{\hat{n}_{\alpha i}\}$相同。我们可以方便地计算$\tilde{n}_{\beta k}$。使用斯特灵公式

$$\ln(n!) \doteq n\ \ln(n) - n \qquad (3.113)$$

可得到下面的关系式

$$\ln\left(\frac{N!}{\prod_{\alpha,i}^{P,L} n_{\alpha i}!}\right) = [N\ \ln(N) - N] - \sum_{\alpha,i}^{P,L} [n_{\alpha i}\ln(n_{\alpha i}) - n_{\alpha i}] \qquad (3.114)$$

上式在（3.109）和满足下面条件

$$\sum_{\alpha,i}^{P,L} n_{\alpha i} = N \qquad (3.115)$$

时一定是极大。用变分原理

$$\delta\left\{-\sum_{\alpha,i}^{P,L} [n_{\alpha i}\ln(n_{\alpha i}) - n_{\alpha i}]\right.$$

$$+\lambda_0\left(\sum_{\alpha,i}^{P,L} n_{\alpha i}-N\right)+\sum_{q=1}^{Q}\lambda_q$$

$$\left[\sum_{\alpha,i}^{P,L} g_{\alpha i}^{q} n_{\alpha i}-\tilde{G}_q(t)\right]\Bigg\}=0 \qquad (3.116)$$

其中λ_0和λ_q（$q=1, 2, \cdots, Q$）是拉格朗日乘子，并且各个n_α可以独立变化。变分导出

$$\left.\begin{aligned} &\text{当 } n_{\alpha i}=\hat{n}_\alpha \text{ 而 } \hat{n}_{\alpha i}=\exp\left(\lambda_0+\sum_{q=1}^{Q}\lambda_q g_{\alpha i}^{q}\right)\\ &\delta n_{\alpha i}\left[-\ln(n_{\alpha i})+\lambda_0+\sum_{q=1}^{Q}\lambda_q g_{\alpha i}^{q}\right]=0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.117)$$

在此，把拉格朗日乘子λ_0和λ_q当作N和$\tilde{G}_q(t)$($q=1, \cdots, Q$）的函数，也就是$\lambda_0=\lambda_0(N, \tilde{G}_q(t))$和$\lambda_q=\lambda_q(N, \tilde{G}_q(t))$。按照约束条件

$$\sum_{\alpha,i}^{P,L}\hat{n}_{\alpha i}\equiv\sum_{\alpha,i}^{P,L}\exp\left(\lambda_0+\sum_{p=1}^{Q}\lambda_p g_{\alpha i}^{p}\right)=N \qquad (3.118a)$$

和

$$\sum_{\alpha,i}^{P,L} g_{\alpha i}^{q} \hat{n}_{\alpha i} = \sum_{\alpha,i}^{P,L} g_{\alpha i}^{q} \exp\left(\lambda_0 + \sum_{p=1}^{Q} \lambda_p g_{\alpha i}^{p}\right)$$

$$= \tilde{G}_q(t) \qquad (3.118b)$$

将拉格朗日乘子$\lambda_0(N, \tilde{G}_q(t))$和$\lambda_q(N, \tilde{G}_q(t))$代入（3.117），便得到作为N和$\tilde{G}_q(t)$函数的最可几社会构形$\{\hat{n}_{\alpha i}\} = \{\tilde{n}_{\alpha i}\}$。将函数$\hat{n}_{\alpha i}(N, \tilde{G})$代入（3.108）便得到$\tilde{G}_q(t)$的运动方程。

为了说明与统计物理关系式的类似性，引入类似于熵函数的量

$$\hat{S}(t) = -\sum_{\alpha,i}^{P,L} \left[\hat{n}_{\alpha i}(t) \ln\left(\hat{n}_{\alpha i}(t) - \hat{n}_{\alpha i}(t)\right)\right] \qquad (3.119)$$

将上式微分后将（3.117）代入便得：

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = -\sum_{\alpha,i}^{P,L} \frac{d\hat{n}_{\alpha i}}{dt} \ln(\hat{n}_{\alpha i})$$

$$= -\sum_{\alpha,i}^{P,L} \frac{d\hat{n}_{\alpha i}}{dt} \left(\lambda_0 - \sum_{q=1}^{Q} \lambda_q g_{\alpha i}^{q}\right)$$

$$= -\lambda_0 \frac{dN}{dt} - \sum_{q=1}^{Q} \lambda_q \frac{d\hat{G}_q(t)}{dt}$$

（3.120）

通过引入“社会势”

$$\hat{T}(t)=\hat{S}+\lambda_0 N+\sum_{q=1}^{Q}\lambda_q\hat{G}_q \qquad (3.121)$$

及其等效公式

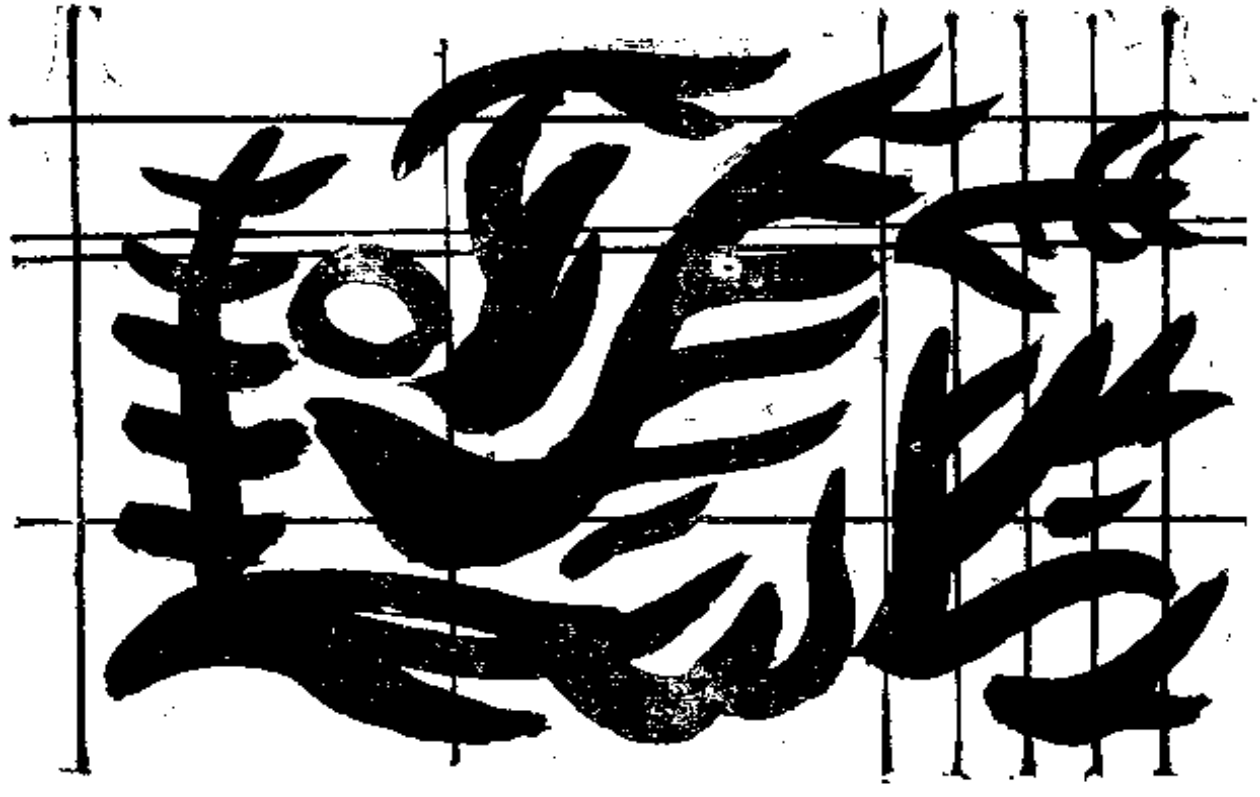
$$\frac{d\hat{T}(t)}{dt}=N\frac{d\lambda_0}{dt}+\sum_{q=1}^{Q}\hat{G}_q(t)\frac{d\lambda_q}{dt} \qquad (3.122)$$

接着把（3.108）代入（3.120）或（3.122）的右边，便得到社会熵和社会势的运动径迹。

正如在第二章看到的那样，当初始条件不同时社会系统会达到不同的稳定状态，因此这里不存在统计物理中单向发展的“H-定理”。再者，局势矢量$\vec{y}$和趋向参数$\vec{K}$可作为动力学变量。因此方程（3.100）或（3.108）与$\vec{y}$和$\vec{K}$的运动方程是耦合的。一般来说，耦合系统的解不一定达到平衡状态。

因为在这里只作了一些普遍的假定，因此从本节得到的总变量的近似闭合方程具有十分复杂的结构。然而在讨论具体模型时，可根据特殊条件导出可迭代的和比较简单的总变量的关系式。当在相互

作用着的社会中建立政治心理的某种总变量的运动方程时，我们将会详细介绍这种迭代步骤（见第六章）。



第四章

人口动力学

——迁移和生灭过程

从这一章开始，我们应用第三章的基础概念去讨论一些典型问题。在这一章，我们将要建立人口动力学的迁移和生灭过程模型。

在这个模型中所研究的“侧面”是“生活在某个市区或街道”的住宅以及可能的态度。因此，转移概率涉及到生和死以及在市区之间的迁移。

在这方面，人们已经积累了大量的有关生物物种的生灭和迁移过程的文献资料。这些文献资料中有随机模型和平均值模型。尽管我们的模型与这些模型存在着许多共同点，但有关人口模型尚需要考虑几个重要的新特点：

1）动物在聚居区之间的迁移往往当作邻区间具有常数迁移率的线性扩散过程。这种模型只是动物群体“随机迁移”的近似模型。但用它来讨论人

口模型是不恰当的：人们迁移到另一个地方（例如城市的另一区）可以看作城市中人口的不同分布，也就是说存在着不同的社会构形。再者，人们的运动由他们对邻区或远市区的评价来决定。然而可以预料，人口的迁移过程象非扩散型一样是非线性的（转移率依赖于当前的社会构形），也就是发生了到非邻区的转移。在下一节就会看到，在城市中两市区的相互作用使人群间最简单的非线性迁移过程可能产生各种各样的效应；例如城市中犹太人居住区的形成，或者由人们相互作用的心理状态的参数值产生的循环迁移。

2）在本章第三节讨论很难调查研究的一种相互作用的纯生灭过程。尤其要用完全随机的模型来探讨动物群体（包括多步过程）的灭绝问题。

3）将著名的Volterra—Lotka模型和捕食者

表4.1 本章各节讨论问题一览表

节	人群数	聚居处或市区数。	迁移人群数	生灭过程
1	P	L	P	包
2	2	2	2	不
3	1	1	0	包
4	2	2	1	包

一被食者的非线性迁移结合起来便得出了一种极其合乎实际的相互作用和生物的实际模型。表4.1列举了本章各节所讨论的问题。

4-1 一般模型*

在本节中，我们讨论如何建立相互作用人口的迁移和生灭过程的主方程和平均值方程。

假定有P个人群φ_α（$\alpha=1,\cdots P$）和一维的态度空间$\mathcal{U}$（因为只讨论“住宅”侧面）。假定有L个市区或聚居处（$i=1,\cdots L$），例如在一个城市中这对应着“生活在市区i中”的态度i_α。社会构形表示为C维社会构形空间$\mathfrak{G}$空间的一个点，其中C=PL：

$$\vec{n}=\{n_{\alpha i}\}\in\mathfrak{G} \qquad (4.1)$$

这里的$\alpha=1,\cdots P$，$i=1,\cdots L$，$n_{\alpha i}$是生活在市区i中团体φ_α的成员数。

假若在各个团体之间同时进行的迁移数是1，我们引入从一种社会构形$\vec{n}\in\mathfrak{G}$变化到另一种社会构形$(\vec{n}+\vec{k})\in\mathfrak{G}$的转移概率$w(\vec{K},\vec{n})$的分布。那么，采用第三章中的符号：

a) 在团体φ_α中从市区i迁移到市区j($i\neq j$)的转移概率 $w^{\alpha}_{ji}[\vec{K},\vec{n}]$ 是：

$$w^{\alpha}_{ji}[\vec{K},\vec{n}]=\begin{cases} n_{\alpha i}\mu^{\alpha}_{ji}(\vec{n},\vec{k}) \\ \quad 当\ \vec{k}=\{\cdots 0\cdots 1_{\alpha j}\cdots 0\cdots \\ \quad\quad (-1)_{\alpha i}\cdots 0\cdots\} \\ 0\ 对所有其它\vec{k} \end{cases}$$

这里的 $\mu^{\alpha}_{ji}(\vec{n},\vec{K})$往往是依赖于 $\vec{n}$和某些趋向参数 $\vec{k}$的相应的各个转移概率。

b) 在市区 i 中团体φ_α成员的生、死转移概率 $w^{\alpha}_{i+}[\vec{k},\vec{n}]$ 和$w^{\alpha}_{i-}[\vec{k},\vec{n}]$ 分别为：

$$w^{\alpha}_{i+}[\vec{k},\vec{n}]=\begin{cases} n_{\alpha i}\beta^{\alpha}_{i} \quad 当 \\ \quad\quad \vec{k}=\{\cdots 0\cdots 1\alpha_i\cdots 0\cdots\} \\ 0 \quad 对其它一切\vec{k} \end{cases}$$

(4.3a)

$$w^{\alpha}_{i-}[\vec{k},\vec{n}]=\begin{cases} n_{\alpha i}\delta^{\alpha}_{i}+n^{2}_{\alpha i}\gamma^{\alpha}_{i} \quad 当 \\ \quad\quad \vec{k}=\{\cdots 0\cdots,(-1)_{\alpha i},\cdots 0\cdots\} \\ 0 \quad 对其它一切\vec{k} \end{cases}$$

(4.3b)

这里的 β^{α}_{i}，δ^{α}_{i} 和 γ^{α}_{i} 分别对应于生、死和饱和率。

若需要的话，定义（4.3a,b）式也可以考虑依赖于空间构形的更复杂形式的生、灭率。

c) 在聚居处之中的捕食者(β)和被捕食者(δ)的动物群体相互作用的 Volterra-Lotka 转移概率是，

$$w_i^{\delta\beta}(\vec{k},\vec{n}) = \begin{cases} n_{\delta i} n_{\beta i} \gamma_{\delta\beta} & \text{当} \\ & \vec{k} = \{\cdots 0 \cdots (-1)_{\delta i} \\ & \qquad \cdots 0 \cdots 1_{\beta i} \cdots\} \\ 0 & \text{对其它一切 } \vec{k} \end{cases} \tag{4.4}$$

按照定义引入的a)——c)的所有的转移概率是半正定的。在一般情况下，总转移概率是在所有分布（4.2～4）上取和：

$$w(\vec{k},\vec{n}) = \sum_{i=1}^{L} \sum_{\alpha=1}^{P} w_i^{\alpha}(\vec{k},\vec{n})$$

$$+ \sum_{i=1}^{L} \sum_{\alpha=1}^{P} \left(w_{i+}^{\alpha}(\vec{k},\vec{n}) + w_{i-}^{\alpha}(\vec{k},\vec{n}) \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{L} \sum_{\delta\beta} w_i^{\delta\beta}(\vec{k},\vec{n}) \tag{4.5}$$

在（4.5）右边的最后一项中，在（δ，β）上的取

和是指所有捕食者β—被捕食者δ的物种对。将(4.5)代入(3.13)，便得到了模型主方程的一般形式：

$$\frac{dp(\vec{n};t)}{dt}=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_M(\vec{n};t)+\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{BD}(\vec{n};t)$$

$$+\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{VL}(\vec{n};t) \qquad (4.6)$$

这里的$p(\vec{n};t)$是在时刻t出现社会构形$\vec{n}$的概率，(4.6)的右边的三项分别指的是迁移、生灭和Volterra-Lotka过程，是从(4.2～4)的三个分布和(4.5)式的$\omega[\vec{k},\vec{n}]$得到的。

为了导出这三项的具体公式，引入作用到社会构形函数上的“转移算子”$E_{\alpha i}$：

$$E_{\alpha i}^{\pm 1}f(n_{11}\cdots n_{\alpha i}\cdots n_{PL})$$

$$=f(n_{11}\cdots(n_{\alpha i}\pm 1)\cdots n_{pl}) \qquad (4.7)$$

将(4.5)和(4.2—4)代入(3.14)，并利用定义(4.7)式便得到主方程(4.6)右边三项的具体公式为：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_M(\vec{n};t)=$$

$$\sum_{i,j=1}^{L}\sum_{\alpha=1}^{P}(E_{\alpha i}E_{\alpha j}^{-1}-1)[n_{\alpha i}\mu_{ji}^{\alpha}(\vec{n},\vec{k})p(\vec{n};t)]$$

(4.8)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{BD}(\vec{n};\ t)=$$

$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{\alpha=1}^{P}\{(E_{\alpha i}^{-1}-1)[n_{\alpha i}\beta_i^{\alpha}p(\vec{n};\ t)]$$

$$+(E_{\alpha i}-1)[(n_{\alpha i}\delta_{\alpha}^{i}+n_{\alpha i}^{2}\gamma_{,}^{\alpha})p(\vec{n};t)]\}$$

(4.9)

和：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{VL}(\vec{n};\ t)=$$

$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{\delta,\beta}(E_{\delta i}E_{\beta i}^{-1}-1)[n_{\delta i}n_{\beta i}\gamma_{\delta\beta}p(\vec{n};\ t)]$$

(4.10)

从主方程（4.6）可以直接导出用下式定义的平均值方程：

$$\langle n_{\gamma k}\rangle_t=\sum_{\vec{n}}n_{\gamma k}p(\vec{n};\ t)\qquad(4.11)$$

为此，以 $n_{\gamma k}$ 乘以（4.6）并在所有构形 $\vec{n}$ 上取和。使用转移公式：

$$n_{\gamma k}E_{\alpha i}E_{\alpha j}^{-1}f(\vec{n})\equiv E_{\alpha i}E^{-1}_{\alpha j}(n_{\gamma k}-\delta_{\gamma\alpha}\delta_{ki}+\delta_{\gamma\alpha}\delta_{kj})f(\vec{n}) \qquad (4.12)$$

便由（4.7）得到了具体结果：

$$\frac{d\langle n_{\gamma k}\rangle_t}{dt}=\Big[\sum_{i=1}^{L}\langle n_{\gamma i}\mu^{\gamma}_{ki}(\vec{n},\vec{k})\rangle_t - \sum_{i=1}^{L}\langle n_{\gamma k}\mu^{\gamma}_{ik}(\vec{n},\vec{k})\rangle_t\Big] + [(\beta^{\gamma}_{k}-\delta^{\gamma}_{k})\langle n_{\gamma k}\rangle_t-\gamma^{\gamma}_{k}\langle n^2_{\gamma k}\rangle_t] + \Big[\sum_{\delta}\nu_{\delta\gamma}\langle n_{\delta k}n_{\gamma k}\rangle_t-\sum_{\beta}\nu_{\gamma\beta}\langle n_{\gamma k}n_{\beta k}\rangle_t\Big] \qquad (4.13)$$

在（4.13）右边的三项分别指迁移、生灭、捕食者—被捕食者的过程。最后一项第一个取和遍及对捕食者γ的被捕食者的物种δ，而第二个取和遍及与被捕食者γ同时存在的捕食者β。

对仅具有一个尖峰分布的$p(\vec{n};t)$，精确方程（4.3）可以通过近似而化为平均值$\langle n_{\gamma k}\rangle_t \cong \tilde{n}_{\gamma k}$的闭合方程组：

$$\frac{d\tilde{n}_{\gamma k}}{dt}=\Big[\sum_{i=1}^{L}\tilde{n}_{\gamma i}\mu^{\gamma}_{ki}(\vec{n},\vec{k})$$

$$-\sum_{j=1}^{L}\tilde{n}_{\gamma k}\mu_{jk}{}^{\gamma}(\vec{n},\ \vec{k})\Big]$$

$$+\left[(\beta^{\gamma}{}_{k}-\delta^{\gamma}{}_{k})\tilde{n}_{\gamma k}-\gamma^{\gamma}{}_{k}\tilde{n}^{2}{}_{\gamma k}\right]$$

$$+\left[\sum_{\delta}\nu_{\delta\gamma}\tilde{n}_{\delta k}\tilde{n}_{\gamma k}-\sum_{\beta}\nu_{\gamma\beta}\cdot\tilde{n}_{\gamma k}\cdot\tilde{n}_{\beta k}\right] \qquad (4.14)$$

也能够得到相同形式的方差的方程，这将在下一节讨论。

4-2 两市区间两相互作用人群的迁移

这一节讨论人口的迁移模型，忽略生灭过程和Volterra—Lotka过程，为简单设只有两个不同的非线性相互作用人群$\mathscr{P}_{\mu}$，$\mathscr{P}_{\nu}$在两市区之间迁移。假定这两个人群仅是“基本人口”中的一部分。

在市区i（i=1,2）中人群$\mathscr{P}_{\mu}$和$\mathscr{P}_{\nu}$的成员数分别以m_i和n_i表示。现在研究$\mathscr{P}_{\mu}$和$\mathscr{P}_{\nu}$的成员的总数。那么，

$$m_1+m_2\approx 2\overline{m} \qquad n_1+n_2\approx 2\ \overline{n} \qquad (4.15)$$

通过变量代换用m，n表征社会构形，令：

$$m_1 = \overline{m} + m \qquad m_2 = \overline{m} - m \qquad -\overline{m} \leqslant m \leqslant \overline{m}$$

和 (4.16)

$$n_1 = \overline{n} + n \qquad n_2 = \overline{n} - n \qquad -\overline{n} \leqslant n \leqslant \overline{n}$$

人群$\mathcal{P}_\mu$和$\mathcal{P}_\nu$的成员从市区i到市区j的转移概率分别为$\mu^{\mu}_{ji}(m,n)$和$\mu^{\nu}_{ji}(m,n)$，由(4.2)可得到从社会构形(m,n)到构形(m+k,n+l)的转移概率w[k,l;m,n]为：

$$\left.\begin{aligned} w[-1,0;m,n] &= (\overline{m}+m)\mu^{\mu}_{21}(m,n) \\ w[+1,0;m,n] &= (\overline{m}-m)\,\mu^{\mu}_{12}(m,n) \\ w[0,-1;m,n] &= (\overline{n}+n)\,\mu^{\nu}_{21}(m,n) \\ w[0,+1;m,n] &= (\overline{n}-n)\mu^{\nu}_{12}(m,n) \end{aligned}\right\} \quad (4.17)$$

主方程、平均值、方差和福克—普朗克方程

将(4.17)代入(4.6)得到：双变量m和n的概率分布P(m,n;t)的主方程：

$$\frac{dp(m,n;t)}{dt} = (E_m - 1)\,\{\omega[-1,0;m,n]\,p(m,n;t)\}$$

$$+(E_m^{-1}-1)\{\omega[1,0;m,n]\,p(m,n;t)\}$$
$$+(E_n-1)\{\omega[0,-1;m,n]\,p(m,n;t)\}$$
$$+(E_n^{-1}-1)\{\omega[0,1;m,n]\,p(m,n;t)\} \quad (4.18)$$

应用（4.13）中的方法，由（4.6）出发便可直接得到m,n,m^2,mn和n^2的平均值的运动方程。当然，$f(m,n)$的平均值定义如下：

$$\langle f(m,n)\rangle_t=\sum_{m=-\bar{m}}^{\bar{m}}\sum_{n=-\bar{n}}^{\bar{n}}f(m,n)P(m,n;t) \quad (4.19)$$

可得精确的方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\langle m\rangle_t}{dt}&=\langle k_m(m,n)\rangle_t\\ \frac{d\langle n\rangle_t}{dt}&=\langle k_n(m,n)\rangle_t\end{aligned}\right\} \quad (4.20)$$

和：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\langle m^2\rangle_t}{dt}&=2\langle mk_m(m,n)\rangle_t+\langle q_m(m,n)\rangle_t\\ \frac{d\langle mn\rangle_t}{dt}&=\langle mk_n(m,n)\rangle_t+\langle nK_m(m,n)\rangle_t\\ \frac{d\langle n^2\rangle_t}{dt}&=2\langle nk_n(m,n)\rangle_t+\langle q_n(m,n)\rangle_t\end{aligned}\right\}$$

(4.21)

其中“漂移因子”：

$$\left.\begin{aligned} k_m(m,n) &= \omega[1,0;m,n] - \omega[-1,0;m,n] \\ k_n(m,n) &= \omega[0,1;m,n] - \omega[0,-1,m,n] \end{aligned}\right\}$$

(4.22)

和“涨落因子”：

$$\left.\begin{aligned} q_m(m,n) &= \omega[1,0;m,n] + \omega[-1,0;m,n] \\ q_n(m,n) &= \omega[0,1;m,n] + \omega[0,-1;m,n] \end{aligned}\right\}$$

(4.23)

假定在平均值$\langle m\rangle_t \equiv \tilde{m}(t)$和$\langle n\rangle_t \equiv \tilde{n}(t)$附近概率分布$P(m,n;t)$只有一个尖峰，便得到(4.20)的近似方程：

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{dt} &\approx k_m(\tilde{m},\ \tilde{n}) \\ \frac{d\tilde{n}}{dt} &\approx k_n(\tilde{m},\ \tilde{n}) \end{aligned}\right\}$$

(4.24)

再者，在$(\tilde{m},\ \tilde{n})$附近将$k_m(m,n)$、$k_n(m,n)$，$q_m(m,n)$和$q_n(m,n)$展开为泰勒级数，并且仅保留展开式的最低次项，则(4.21)的近似方程为：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{mm}}{dt} &= \tilde{q}_m + 2\sigma_{mm}\partial_m\tilde{k}_m + 2\sigma_{mn}\partial_n\tilde{k}_m \\
\frac{d\sigma_{mn}}{dt} &= \sigma_{mm}\partial_m\tilde{k}_n + \sigma_{mn}(\partial_n\tilde{k}_n + \partial_m\tilde{k}_m) + \\
&\qquad \sigma_{nn}\partial_n\tilde{k}_m \\
\frac{d\sigma_{nn}}{dt} &= \tilde{q}_n + 2\sigma_{nn}\partial_n\tilde{k}_n + 2\sigma_{nm}\partial_m\tilde{k}_n
\end{aligned}\right\} \qquad (4.25)$$

其中：

$$\partial_m \equiv \partial/\partial_m,\quad \partial_n \equiv \partial/\partial_n,\quad \tilde{k} = k(\tilde{m},\ \tilde{n}),$$

$$\tilde{q} = q(\tilde{m},\ \tilde{n})$$

以及方差表示为：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{mm} &= \langle m^2\rangle_t - \langle m\rangle_t^2 \\
\sigma_{mn} &= \langle mn\rangle_t - \langle m\rangle_t\langle n\rangle_t \\
\sigma_{nn} &= \langle n^2\rangle_t - \langle n\rangle_t^2
\end{aligned}\right\} \qquad (4.26)$$

为方便起见，用归一化变量x,y代替m,n；

$$x = \frac{m}{\bar{m}} \qquad y = \frac{n}{\bar{n}} \qquad -1 \leqslant x, y \leqslant 1 \quad (4.27)$$

而漂移和涨落因子为：

$$k_m(m,n)=\overline{m}K_m(x,y)$$

$$q_m(m,n)=\overline{m}Q_m(x,y)$$

和：

$$k_n(m,n)=\overline{n}K_n(x,y)$$

$$q_n(m,n)=\overline{n}Q_n(x,y) \qquad (4.28)$$

把$\tilde{x}$，$\tilde{y}$写成x,y，则平均值方程（4.24）便为：

$$\frac{dx}{dt}=K_m(x,y) \quad \frac{dy}{dt}=K_n(x,y) \qquad (4.29)$$

引入：

$$\sigma_{xx}=\frac{1}{\overline{m}^2}\sigma_{mm}=\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle$$

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{\overline{m}\,\overline{n}}\sigma_{mn}=\langle(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle \qquad (4.30)$$

$$\sigma_{yy}=\frac{1}{\overline{n}^2}\sigma_{nn}=\langle(y-\langle y\rangle)^2\rangle$$

代替σ_{mm}，σ_{nn}，σ_{mn}。方差方程（4.25）变为：

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dt}=-\frac{1}{\overline{m}}Q_m+2\sigma_{xx}\partial_xK_m+2\sigma_{xy}\partial_yK_m$$

$$\frac{d\sigma_{xy}}{dt}=\sigma_{xx}\partial_xK_n+\sigma_{xy}(\partial_xK_m+\partial_yK_n)+\sigma_{yy}\partial_yK_m$$

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dt}=\frac{1}{\overline{n}}Q_n+2\sigma_{yy}\partial_yK_n+2\sigma_{yx}\partial_xK_n$$

（4.31）

应用§2.2中从主方程（3.14）得到福克—普朗克方程（3.32）的推导步骤便得到现在模型的福克—普朗克方程：

$$\frac{\partial P(x,y;t)}{\partial t} = -\{\partial_x[K_m(x,y)P(x,y;t)] + \partial_y[K_n(x,y)P(x,y;t)]\} + \frac{1}{2m}\partial_x^2[Q_m(x,y)P(x,y;t)] + \frac{1}{2n}\partial^2{}_y[Q_n(x,y)P(x,y;t)] \tag{4.32}$$

概率分布P(x,y;t)的归一化条件是：

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} dxdyP(x,y;t) = 1 \tag{4.33}$$

由定义（4.17，22，23，28）断定：在（4.32）中的漂移和涨落因子是变量x、y的函数。

容易验证：从（4.32）导出的平均值和方差方程与主方程（4.18）直接得到的结果（4.29，31）完全相同。

为了使得到的模型具体而适用，必须找到两个人群$\mathcal{P}_\mu$和$\mathcal{P}_\nu$的转移概率$\mu_{ji}{}^{\mu}(m,n)$和$\mu_{ji}{}^{\nu}(m,n)$的适当模型。我们采用了人们心理状态可能产生的几

种迁移过程的相当灵活的模型。

$$\left.\begin{aligned}
\mu^{u}{}_{12}(m,n) &= \gamma\exp[u(m,n)] \\
&\equiv \gamma\exp\{u[x,y]\} \\
\mu^{u}{}_{21}(m,n) &= \gamma\exp[-u(m,n)] \\
&\equiv \gamma\exp\{-u[x,y]\} \\
\mu_{12}{}^{v}(m,n) &= \gamma\exp[v(m,n)] \\
&\equiv \gamma\exp\{v[x,y]\} \\
\mu_{21}{}^{v}(m,n) &= \gamma\exp[-v(m,n)] \\
&\equiv \gamma\exp\{-v[x,y]\}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.34)$$

在这里：

$$\left.\begin{aligned}
u(m,\ n) &= (\pi_\mu + \hat{k}_\mu m + \hat{\sigma}_\mu n) \\
&= u[x,\ y] = (\pi_\mu + k_\mu x + \sigma_\mu y)
\end{aligned}\right\}$$

和：

$$\left.\begin{aligned}
v(m,\ n) &= (\pi_\nu + \hat{k}_\nu n + \hat{\sigma}_\nu m) \\
&= v[x,\ y] = (\pi_\nu + k_\nu y + \sigma_\nu x)
\end{aligned}\right\} \qquad (4.35)$$

以及：

$$\left.\begin{aligned}
k_\mu &= \overline{m}\hat{k}_\mu \qquad & \sigma_\mu &= \overline{n}\,\hat{\sigma}_\mu \\
k_\nu &= \overline{n}\,\hat{k}_\nu \qquad & \sigma_\nu &= \overline{m}\hat{\sigma}_\nu
\end{aligned}\right\} \qquad (4.36)$$

通过（4.34）以及（4.35）和（4.17）的关系便可知道参数γ，π_μ，π_γ，p_μ，p_γ，σ_μ和σ_γ的含义。一般说来，各个概率表征了人群$\mathscr{P}_\mu$和$\mathscr{P}_\gamma$的成员运动到城市的另一半或市区的容易程度，还考虑城市中两个区域$\mathscr{P}_\mu$和$\mathscr{P}_\gamma$当时的成员数和这些区域的特性“值”。需要解释的是，γ、π_γ、k_γ、σ_γ和γ、π_μ、k_μ、σ_μ的意义相同，因此只需要讨论γ、π_μ、k_μ、σ_μ就可以了。

参数γ决定了发生迁移的时间尺度，因此它是机动性参数。

参数π_μ描述了$\mathscr{P}_\mu$的成员偏好某个市区的程度：当$\pi_\mu>0$（$\pi_\mu<0$）$\mathscr{P}_\mu$的成员偏好市区1(市区2）。因而π_μ是$\mathscr{P}_\mu$的偏好参数。

参数k_μ（>0或<0）描述了同一市区中$\mathscr{P}_\mu$的成员趋向于该集团的程度，也就是表示了这个人群集团趋向“生活聚集”的水平。因而K_μ是$\mathscr{P}_\mu$的内引参数。

参数σ_μ（>0或<0）表示同一市区中$\mathscr{P}_\mu$的成员趋向与另一人群$\mathscr{P}_\gamma$成员一起生活的程度（正或负）。因而σ_μ是$\mathscr{P}_\mu$的外引参数。

在（3.34）中以π_μ、k_μ和σ_μ表示的几个趋向参数的本身是相互迭加的。既可以在考查期间将所

有的趋向参数当作常数，也可以在长的期间尺度上把所有趋向参数当作时间的函数。

尽管这种表示有一定的启发意义，但是目前尚不能得出这些参数的具体的心理状态的解释。这个模型是相当适用和有效的，任何引起迁移趋向的种种因素都可用转移概率（4.34）或由它的推广形式来讨论。

方程的相关解

如果将（4.17,34,35）代入主方程(4.18)，并且在平均值和方差方程(4.29,31）以及福克一普朗克方程（4.32）中使用（4.22，23，28），便得到了这些方程的具体形式。现在讨论，或者通过解析或者通过数值的方法能够得到的相关解。

我们首先必须寻找主方程的定态解 p_{st}（m，n）。应考虑到最可几构形（m，n）以及在定态解附近的涨落后所经历的一种可能的不平衡弛豫的迁移过程来构造这种解。

哈肯已经导出了主方程的一般定态解 $p_{st}(\bar{i})$ 的公式，即：

$$0 = \frac{dp_{st}(\vec{i})}{dt} \sum_{j} [\omega(\vec{j}, \vec{i}) p_{st}(\vec{i}) - \omega(\vec{i}, \vec{j}) p_{st}(\vec{j})] \qquad (4.37)$$

其中$\vec{i}$和$\vec{j}$可能是多维指标，在“细致平衡”的情况下，要求在每一对$(\vec{j}, \vec{i})$间存在

$$\omega(\vec{j}, \vec{i}) p_{st}(\vec{i}) = \omega(\vec{i}, \vec{j}) p_{st}(\vec{j}) \qquad (4.38)$$

从直观上看，下面给出的解(4.39)的形式是易于接受的：从任意选定的$\vec{i}_0 = 0$点出发，至少存在一个链$\mathcal{C}$(一般说来有很多链)：

$$\vec{i}_1 \equiv 1, \ \vec{i}_2 \equiv 2, \ \cdots \vec{i}_{n-1} \equiv (n-1), \ \vec{i}_n \equiv \vec{j}$$

对另外的$\vec{j} \neq 0$的点具有非零的转移概率$w(1, 0)$，$\omega(0, 1)$，$\omega(2, 1)$，$\omega(1, 2)$ $\cdots\omega(j, n-1)$，$\omega(n-1, j)$。如果不是这样，$\vec{j}$就是一个不能以概率流达到的孤立点(从一个初始分布$P(\vec{i}, 0) = \delta_{i_0}$出发)。研究这些链中的一个，通过反复应用(4.38)便得到了定态解$p_{st}(\vec{j})$的公式：

$$p_{st}(\vec{j}) = p_{st}(0) \prod_{\gamma=1}^{n-1} \frac{\omega(\gamma+1, \gamma)}{\omega(\gamma, \gamma+1)} \qquad (4.39)$$

从（4.38）便可证明这个定态解是唯一的，因而与链$\mathcal{C}$的选择无关。利用（4.39）的归一化可确定$P_{st}(0)$的量值。同时，$\omega(\vec{j}, \vec{i})$的条件与（4.38）相同，但并不包括从（4.39）导出的定态解。对于任何具有$\omega(i+1, i)\neq 0$和$\omega(i, i+1)\neq 0$诸点的闭合回路$\mathcal{L}$（$i=0, 1, 2\cdots(l-1)$，$l\equiv 0$），当$\vec{j}\approx 0$时，使用（4.39）并用$\mathcal{L}$替换$\mathcal{C}$便得到：

$$(\mathcal{L})\prod_{\gamma=0}^{l-1}\frac{\omega(\gamma+1, \gamma)}{\omega(\gamma, \gamma+1)}=1 \qquad (4.40)$$

方程（4.40）等效于（4.38），但在细致平衡条件中没有涉及定态解$p_{st}(\vec{i})$。

现在检验满足细致平衡条件的模型情况。在（4.17）中，仅在（m, n）空间的相邻点之间存在转移概率，细致平衡的充要条件要求所有如下的元闭合回路

$\mathcal{L}$（(m, n); (m+1, n); (m+1, n+1); (m, n+1); (m, n)）

遵守（4.40），这就是说：

$$\frac{\omega[1, 0; m, n]\omega[0, 1; m+1, n]}{\omega[-1, 0; m+1, n]\omega[0, -1; m+1, n+1]}$$

$$\frac{\omega[-1,0;m+1,n+1]\omega[0,-1;m,\ n+1]}{\omega[1,0;\ m,\ n+1]\omega[0,\ 1;\ m,\ n]}=1 \tag{4.41}$$

将(4.34)、(4.35)代入(4.17)、(4.41)得到条件：

$$\left.\begin{array}{l}\exp[2(\hat{\sigma}_\mu-\hat{\sigma}_\nu)]=1 \quad \text{即：} \\ \hat{\sigma}_\mu=\hat{\sigma}_\nu\equiv\hat{\sigma} \quad \text{和} \quad \overline{m}\sigma_\mu=\overline{n}\sigma_\nu\end{array}\right\} \tag{4.42}$$

并隐含着，在相同的外引参数下，组致平衡才能很好成立。在这种情况下，通过使用(4.39)和选择链：

$$\mathcal{C}((0,\ 0),(1,\ 0),\cdots,(m,\ 0);(m,\ 1),\cdots,(m,\ n))$$

便可建立(4.18)的精确定态解。即：

$$P_{st}(m,\ n)=P_{st}(0,\ 0)\prod_{\mu=1}^{m-1}\frac{\omega[1,0;\ \mu,0]}{\omega[-1,0;\ \mu+1,0]}$$

$$\prod_{\gamma=0}^{n-1}\frac{\omega[0,1;\ m,\gamma]}{\omega[0,-1;\ m,\gamma+1]} \tag{4.43}$$

将(4.34)、(4.35)代入(4.17)后作积，便得到了精确的结果：

$$P_{st}(m,n)=C\left(\frac{2\overline{m}}{\overline{m}+m}\right)\left(\frac{2\overline{n}}{\overline{n}+n}\right)\exp[\varphi(m,n)] \tag{4.44}$$

其中

$$\varphi(m,\ n) = (2\pi_\mu m + 2\pi_\nu n + \hat{k}_\lambda m^2 + 2\hat{\sigma}mn + \hat{k}_\gamma n^2) \tag{4.45}$$

且C是归一化因子。在计算二项式系数时，使用斯特灵公式最后得到：

$$p_{st}(m,\ n) \approx C' \exp[\phi(m,\ n)] \tag{4.46}$$

以及：

$$\begin{aligned}\Phi(m,\ n) = \varphi(m,\ n) &- [(\overline{m}+m)\ln(\overline{m}+m) \\ &+ (\overline{m}-m)\ln(\overline{m}-m)] \\ &- [(\overline{n}+n)\ln(\overline{n}+n) + (\overline{n}-n)\ln(\overline{n}-n)]\end{aligned} \tag{4.47}$$

分布（4.46）的极值由下面方程确定：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi(m,\ n)}{\partial m} = 0, \\ &\text{即}\quad \frac{m}{\overline{m}} \equiv x = \tanh(u[x,\ y]) \\ &\frac{\partial\Phi(m,\ n)}{\partial n} = 0, \\ &\text{即}\quad \frac{n}{\overline{n}} \equiv y = \tanh(v[x,\ y])\end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

在现在的情况下（4.42）并不成立，也就是没有达到细致平衡。在这种情况下，只能得到

（4.18）的相当复杂的定态解表达式。

但是，从细致平衡解的公式（4.44）看出，在不满足细致平衡时的公式应是：

$$p_{st}(m,n) = C\left(\frac{2\overline{m}}{\overline{m}+m}\right)\left(\frac{2\overline{n}}{\overline{n}+n}\right)\exp[\chi(m,n)] \qquad (4.49)$$

这里的$\chi(m, n)$是(m,n)的二阶多项式的近似式。将（4.49）代入定态主方程（4.18），在适当方式下展开为指数表示式，通过比较系数便可确定$\chi(m, n)$：

$$\chi(m, n) = 2\pi_\mu m + 2\pi_\nu n + \hat{k}_\mu m^2 + (\hat{\delta}_\mu + \hat{\sigma}_\nu)mn + \hat{k}_\nu n^2 \qquad (4.50)$$

（4.49）的$p_{st}(m, n)$公式和（4.50）一起显然合成了（4.44），并可作为不满足细微平衡时的一级近似。

现在分析非定态迁移过程。从具有一个尖峰的概率分布$P(x, y; t=0)$出发，我们似乎有理由假定在所研究的期间内分布仍然保持单峰。只要这个假定是正确的近似，那么在闭合平均值方程（4.29）和方差方程（4.31）中就已经包含了一切

关联的信息。通过计算机解的图表也支持了这个假定。

将具体的漂移和涨落因子（4.28）代入来自（4.29）和（4.31）的关联方程的具体公式，利用（4.22）、（4.23）定义的（4.17）、（4.34）式：

$$\left.\begin{aligned} K_m(x,\ y) &= 2\gamma\{\sinh(u[x,\ y]) \\ &\quad -x\cosh(u[x,\ y])\} \\ K_n(x,\ y) &= 2\gamma\{\sinh(v[x,\ y]) \\ &\quad -y\cosh(v[x,\ y])\} \end{aligned}\right\} \quad (4.51)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_m(x,\ y) &= 2\gamma\{\cosh(u[x,\ y]) \\ &\quad -x\sinh(u[x,\ y])\} \\ Q_n(x,\ y) &= 2\gamma\{\cosh(v[x,\ y]) \\ &\quad -y\sinh(v[x,\ y])\} \end{aligned}\right\} \quad (4.52)$$

然后，利用（4.29）、（4.51），并引入标度无量纲时间$\tau=2\gamma t$，便得到下面具体的平均值方程（对平均$\tilde{x}$，$\tilde{y}$用x、y代替）

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\tau} = [\tanh(u) - x]\cosh(u)\\
&\frac{dy}{dt} = [\tanh(v) - y]\cosh(v)\\
&\text{其中：}\\
&u = (\pi_\mu + k_\mu x + \sigma_\mu y)\\
&v = (\pi_\gamma + k_\gamma y + \sigma_\gamma x)
\end{aligned}\right\} \qquad (4.53)$$

勿需推导便从（4.31）、（4.51）、（4.52）得到了具体而又冗长的方差方程。但是应当指出，对于等于零的偏好参数（即 $\pi_\mu = \pi_\gamma = 0$）在以下变换时：

a› $x \to -x$; $y \to -y$

b› $x \to x$; $y \to -y$ $\sigma_\gamma \to -\sigma_\gamma$; $\sigma_\mu \to -\sigma_\mu$

方程（4.53）是不变式。

不变性a›反映了当$\pi_\mu = \pi_\gamma = 0$时两市区的等同性。不变性b›意味着，当$x(\tau) > 0$和$y(\tau) > 0$时具有正的外引参数（$\sigma_\gamma > 0$和$\sigma_\mu > 0$）的解描述了同一市区中人群$\mathcal{P}_\gamma$和$\mathcal{P}_\mu$的聚集情况，具有负的外引参数($\sigma_\gamma' = -\sigma_\gamma$和$\sigma_\mu' = -\sigma_\mu$)的相应解 $x'(\tau) = x(\tau)$和$y'(\tau) = -y(\tau)$描述了两人群的分裂。

迁移系统的平均值随时间变化的整体结构主要依赖于微分方程(4.53)的定态或奇点$P_j(x_j, y_j)$。

其定义是：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{Pj} &= \cosh(u_i)[\tanh(u_j)-x_j]=0\\ \left(\frac{dy}{d\tau}\right)_{Pj} &= \cosh(V_i)[\tanh(v_j)-y_j]=0\end{aligned}\right\} \quad (4.54)$$

即等效于：

$$\left.\begin{aligned}F_\mu(x_i, y_j) &\equiv \{\tanh(u[x_j, y_j])-x_j\}=0\\ F_\gamma(x_j, y_j) &\equiv \{\tanh(V[x_j, y_j]-y_j\}=0\end{aligned}\right\} \quad (4.55)$$

线性稳定性分析的含义是，在方程解$P_j(x_j, y_j)$附近的任一点$P(x(\tau), y(\tau))$（由(4.53)支配的运动）开始的运动若趋近于P_j，则P_j是稳定焦点。若离开P_j，则P_j是不稳定的焦点。

由此，从奇异点$P_j(x_j, y_j)$引入小的偏差

$$\xi(\tau)=x(\tau)-x_j \qquad \eta(\tau)=y(\tau)-y_j \quad (4.56)$$

来考查该点。将上式代入(4.53)后，对$\xi(\tau)$和$\eta(\tau)$线性化得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= -\gamma_{\mu j}\xi+\sigma_{\mu j}\eta\\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \sigma_{\gamma j}\xi-\gamma_{\gamma j}\eta\end{aligned}\right\} \quad (4.57)$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} K_{\mu j} &= \frac{K_\mu}{\cosh(u_j)} \qquad K_{\nu j} = \frac{K_\nu}{\cosh(v_j)} \\ \gamma_{\mu j} &= [\cosh(u_j) - K_{\mu j}] \\ \gamma_{\nu j} &= [\cosh(v_j) - K_{\nu j}] \\ \sigma_{\mu j} &= \frac{\sigma_\mu}{\cosh(u_j)} \qquad \sigma_{\nu j} = \frac{\sigma_\nu}{\cosh(v_j)} \end{aligned}\right\} \tag{4.58}$$

（4.57）的解是本征解的线性组合：

$$\left.\begin{aligned} \xi_\pm(\tau) &= \xi_{0\pm}\exp(\lambda_{j\pm}\tau) \\ \eta_\pm(\tau) &= \eta_{0\pm}\exp(\lambda_{j\pm}\tau) \end{aligned}\right\} \tag{4.59}$$

且本征值为：

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{j\pm} &= -\frac{1}{2}\left[\left(\gamma_{\mu j} + \gamma_{\nu j}\right)\right. \\ &\quad \left. \pm\sqrt{(\gamma_{\mu j} + \gamma_{\nu j})^2 + 4\varepsilon_j}\right] \end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

其中

$$\varepsilon_j \equiv \sigma_{\mu j}\sigma_{\nu j} - \gamma_{\mu j}\gamma_{\nu j}$$

本征值λ_{j+}和λ_{j-}或者是实数或者是共轭复数。显然，如果$\mathrm{Re}\{\lambda_{j+}\}<0$和$\mathrm{Re}\{\lambda_{j-}\}<0$，则$P_j$是稳定焦点。如果$\mathrm{Re}\{\lambda_{j+}\}>0$和/或$\mathrm{Re}\{\lambda_{j-}\}>0$，则$P_j$是不稳定焦点。如果$\lambda_{j\pm}$是实数（复数），$P(\tau)$将以直线（或螺旋形）趋近（或离开）$P_j$。根据

（4.60）作出的表4.2表明了五种主要情况：

表4.2 稳定性分析的主要情况

参数的条件	本征值	Pj
a) $\gamma_{\mu j}+\gamma_{\nu j}>0$ $-\infty<\varepsilon_j<-\frac{1}{2}(\gamma_{\mu j}+\gamma_{\nu j})$	$\lambda_{j\pm}$为共轭复数 $\mathrm{Re}\{\lambda_{j\pm}\}<0$	稳定
b) $\gamma_{\mu j}+\gamma_{\nu j}>0$ $-\frac{1}{2}(\gamma_{\mu j}+\gamma_{\nu j})<\varepsilon_j<0$	$\mathrm{Im}\{\lambda_{j\pm}\}=0$ $\lambda_{j\pm}<0$	稳定
c) $\gamma_{\mu j}+\gamma_{\nu j}<0$ $-\infty<\varepsilon_j<-\frac{1}{2}\lvert\gamma_{\mu j}+\gamma_{\nu j}\rvert$	$\lambda_{j\pm}$为共轭复数 $\mathrm{Re}\{\lambda_{j\pm}\}>0$	不稳定
d) $\gamma_{\mu j}+\gamma_{\nu j}<0$ $-\frac{1}{2}\lvert\gamma_{\mu j}+\gamma_{\nu j}\rvert<\varepsilon_j<0$	$\mathrm{Im}\{\lambda_{j\pm}\}=0$ $\lambda_{j\pm}>0$	不稳定
e) $\gamma_{\mu j}+\gamma_{\nu j}\gtrless 0$ $\varepsilon_j>0$	$\mathrm{Im}\{\lambda_{j\pm}\}=0$ $\lambda_{j+}\lambda_{j-}<0$	不稳定

特别重要的是出现在下面条件下的情况：

$$k_\mu+k_\gamma>2,\ \sigma_\mu\sigma_\gamma<0\text{和}\pi_\mu=\pi_\gamma=0 \qquad (4.61)$$

其原点P(0，0)仅是情况C>的不稳定的焦点（表4.2)。再者，在区域D($-1\leqslant x\leqslant+1,-1\leqslant y\leqslant+1$)的（4.53）的流线总在边界的内部，因为：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{d\tau}<0 \quad 当x=1 \quad 和 \quad \dfrac{dx}{d\tau}>0 \quad 当x=-1 \\ \dfrac{dy}{d\tau}<0 \quad 当y=1 \quad 和 \quad \dfrac{dy}{d\tau}>0 \quad 当y=-1\end{array}\right\} \tag{4.62}$$

这意味着在D（不包括原点P(0，0)构成的区域D）中，根据Poincare—Bendixon 定理，（4.53）的解必定是极限环。图4.7a（在下文解释）的计算机解证实了这种说法。

在图4.1—4.7中，表明了在相同的趋向参数下定态主方程的解是（4.44）、（4.49）。为了说明现象，在所有的计算中$\bar{m}$和$\bar{n}$取了低值20，这就使最后的分布有一个较大的宽度。

在解释下面所有的图时，一定要记住，由D中变量x，y子域的定义可划分为以下四种情况：

$D_{++}(0<x<1,\ 0<y<1)$　两个人群集结在市区1

$D_{-+}(-1<x<0,\ 0<y<1)$　$\mathcal{P}\mu$集结在区2
$\mathcal{P}\nu$集结在区1

$D_{+-}(0<x<1,\ -1<y<0)$　$\mathcal{P}\mu$集结在区1
$\mathcal{P}\nu$集结在区2

$D_{--}(-1<x<0,\ -1<y<0)$两个人群集结在市区2

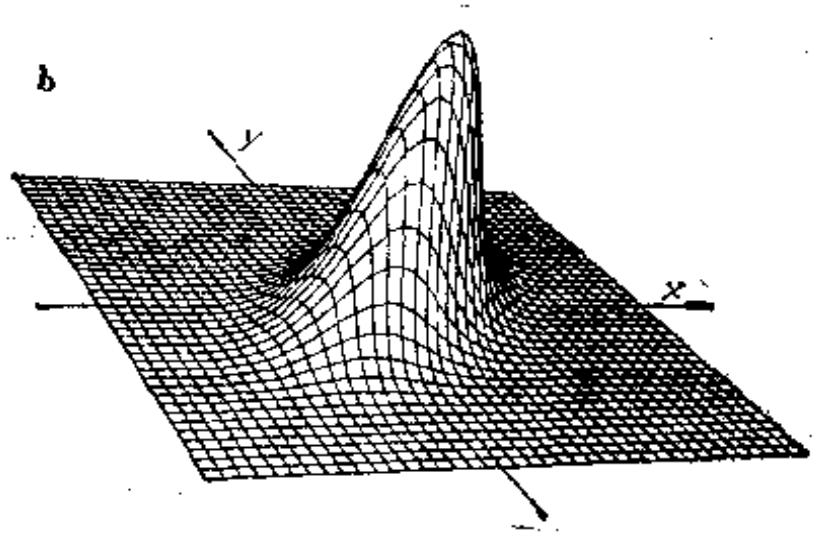


图4.1 趋向参数$\pi_\mu = \pi_\nu = 0$ $k_\mu = k_\nu = 0.2$和$\sigma_\mu = \sigma_\nu = 0.5$ $\overline{m} = \overline{n} = 20$时主方程的定态解：
$P_{st}(m,n)_{max} = 0.9937 \cdot 10^{2}$

在图4.1 中表示了小的内引和外引参数下的结果，所有的平均值趋入稳定的焦点P(0，0)。这个 焦点表示在两市区中两人群的一种均匀分布。相应的定态概率分布集结在这个稳定焦点的周围。

明显而直观的结果是：对小的内引和外引参数作用下的人群来说，在市区1和市区2的两人群中有多少成员决定迁移并不起显著作用。由于$\pi_\mu = \pi_\nu = 0$则他们对任一市区都没有偏好，因而可以预料，任何初始的人群的非平衡分布最终会达到均匀分布状态。

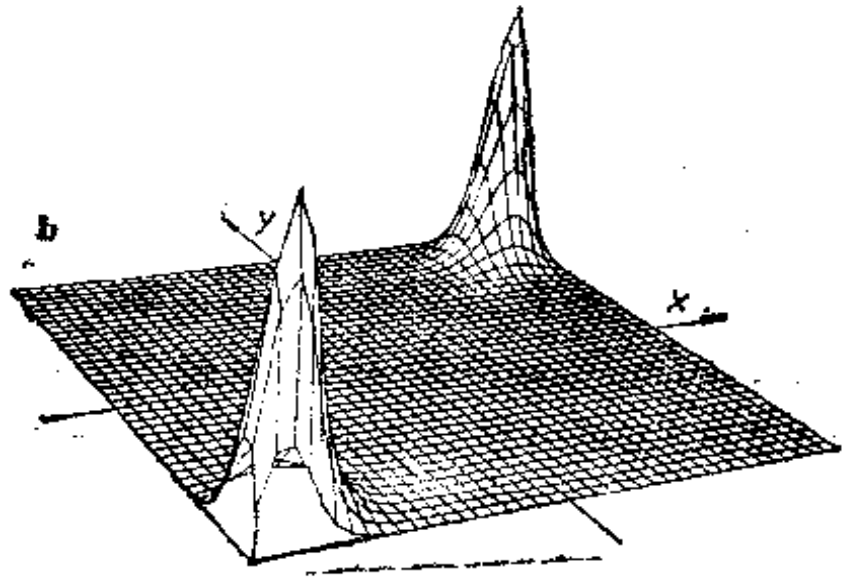


图4.2　趋向参数$\pi_\mu = \pi_\nu = 0$　$k_\mu = k_\nu = 0.5$和 $\sigma_\mu = \sigma_\nu = 1.0$　$\bar{m} = \bar{n} = 20$时主方程的定态解。
$P_{st}(m, n)_{max} = 0.2615 \cdot 10^{-1}$

图4.2表示了小的内引和大的外引参数作用下的情况。由不同的初始值开始，平均值运动到D_{++}或D_{--}的稳定焦点。两个焦点表示两个人群分别聚居在市区1和2。在另一方面，焦点P(0, 0)表示的均匀的人群分布变为不稳定的了。那么，图4.2的稳态分布表明，人群对称聚居在稳定焦点附近。

毫无疑问，大的外引参数表示了在两人群之间的相互“吸引”，趋向于一块生活，因而迁移到条件更好的另一人群的聚居区。如果两地区条件不同则两个人群的多数最终安定在城市的同一条件好的

区域。

图4.2 说明了在如下变换下，方程（4.53）是不变式的例子：$\{x\to x;\ y\to -y;\ \sigma_\mu=-\sigma_\mu$ 和 $\sigma_\nu=-\sigma_\nu\}$ 在 $\pi_\mu=\pi_\mu=0$ 时成立，即除图4.4外所有的图4.1～7都很好成立。在变换 $\sigma_\mu\to-\sigma_\mu$ 和 $\sigma_\nu\to-\sigma_\nu$ 下，图表示了相反的新的社会的情况。图4.2的情况是由在负的引力参数 $\sigma_\mu=-1$ 和 $\sigma_\nu=-1$ 所引起的构形。这样的参数描述了人群之间相互“憎恶”的情况，结果引起一个人群的成员迁出了另一人群的多数人所生活的区域。图4.2的映象表示一种态度的改变：即流线汇集到新的区域 D_{-+} 和 D_{+-} 的稳定焦点。新的焦点表示与 $\mathcal{P}_\mu$ 生活的市区2以及 $\mathcal{P}_\nu$ 的市区1的分离或者相反，这可能是犹太聚居区形成的一种恰当的模型。

图4.3表明了在非常强的内引参数和外引参数下的解。除了主要的稳定焦点 D_{++} 和 D_{--} 之外，现在还存在次稳定焦点 D_{-+} 和 D_{+-}。这意味着尽管存在着“相互引力”情况下，不同市区里的 $\mathcal{P}_\mu$ 和 $\mathcal{P}_\nu$ 人群的各自聚居。这是由于很强的内引参数阻止人群 P_μ 和 $\mathcal{P}_\nu$ 现存群的分离。当起始值不同时，平均值会运动到一个主要的或次要的焦点。但图4.3的定态分布只在两个主焦点附近呈现两个明显的最大

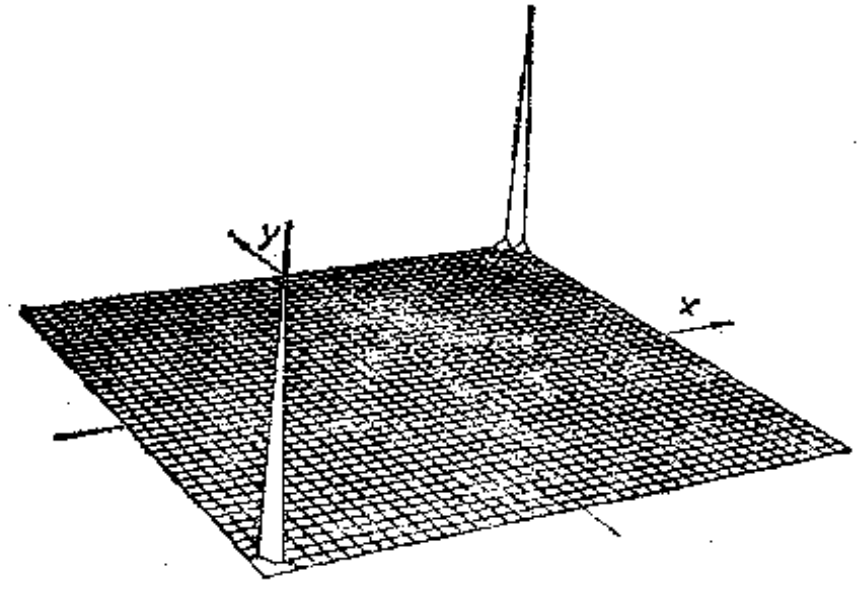


图4.3　趋向参数$\pi_\mu=\pi_v=0$　$k_\mu=k_v=2.6$和$\sigma_\mu=\sigma_v=1.0$，$\bar{m}=\bar{n}=20$时主方程的定态解　$P_{st}(m,n)_{max}=0.4669$

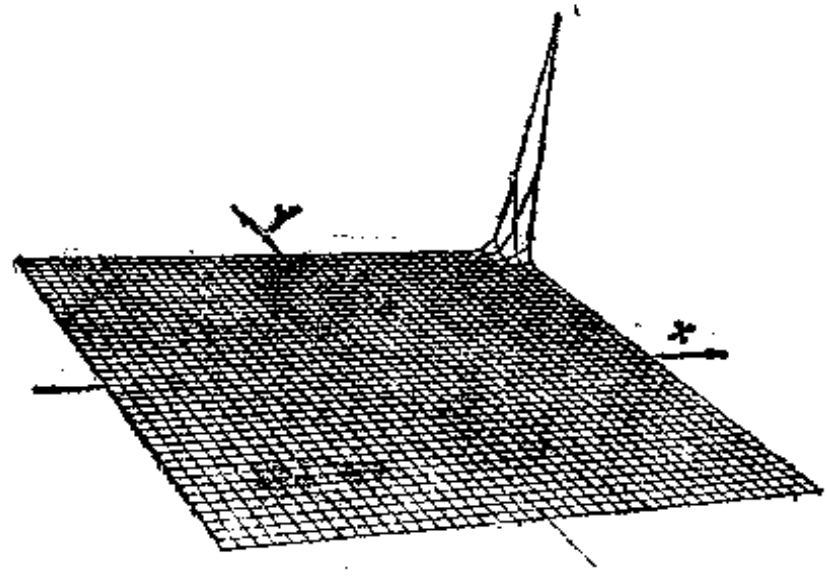


图4.4　趋向参数$\pi_\mu=\pi_v=0.25$，$k_\mu=k_v=1.2$和$\sigma_\mu=\sigma_v=1.0$。$\bar{m}=\bar{n}=20$时主方程的定态解：$P_{st}(m,n)_{max}=0.5197$

值。

如果两人群对市区1有偏好，除有正的内引和外引参数外，平均值主要集结在稳定焦点D_{++}。图4.4表明的定态分布仅具有一个显著的极大值，即在主要稳定焦点附近。这个结果显然说明：如果在人群内和人群之间的引力是按一种“自然的”或隐含偏好于市区1来迭加时，两人群的多数最终将迁移并定居在市区1。计算出的另一稳定焦点D_{--}表示小得多的可能情况，因为仅在一定的初始条件下，由于内引和外引作用，两个人群才能仍定居在小的偏好区2。

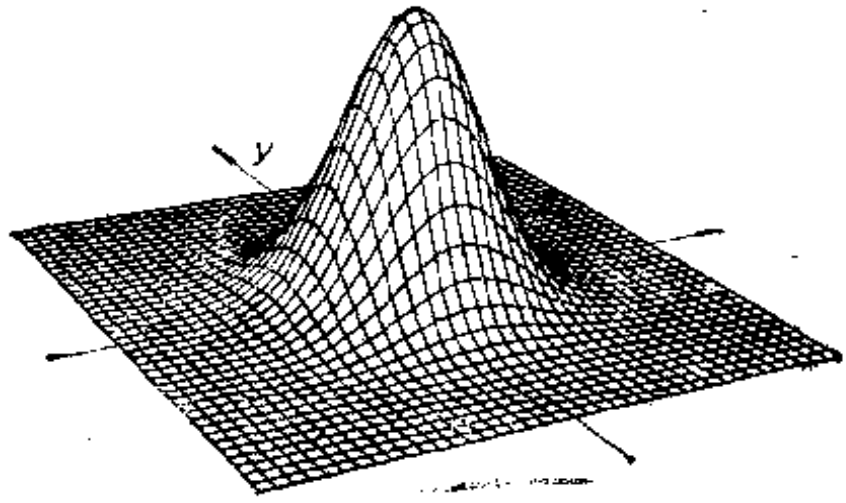


图4.3　趋向参数$\pi_\mu = \pi_\nu = 0$　$k_\mu = k_\nu = 0.5$，
$\sigma_\mu = -\sigma_\nu = 1.0$
$\bar{m} = \bar{n} = 20$时主方程的定态解：
$P_{st}(m, n) = 0.7952 \cdot 10^{-3}$

图4.5表示在弱内引参数和强的非对称的外引参数下：$\mathscr{P}_\mu$趋向于成为$\mathscr{P}_\nu$的邻居（$\sigma_\mu>0$），$\mathscr{P}_\nu$想从$\mathscr{P}_\mu$分离（$\sigma_\nu<0$）。这样一来，图4.5的定态解就表明聚居在这个焦点的附近。虽然定态状态——两人群在两市区均匀分布，在非平衡情况时，由于人群$\mathscr{P}_\nu$避免与$\mathscr{P}_\mu$接触，趋向落后于迁移过程。但是，$\mathscr{P}_\nu$的弱的内引参数——仅仅表示这个人群对一起生活的偏好很弱——最终导致了人群在两市区中均匀的定态分布。

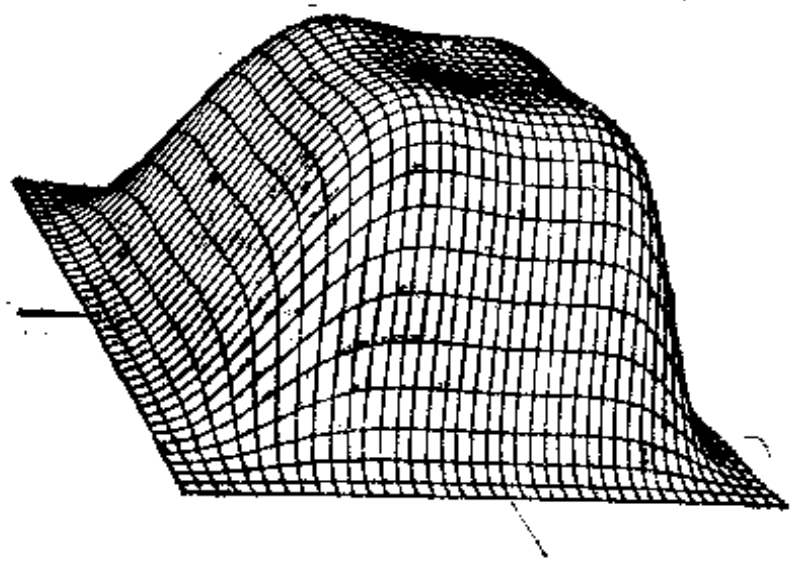


图4.6　趋向参数$\pi_\mu=\pi_\nu=0$，$k_\mu=k_\nu=1.0$和$\sigma_\mu=-\sigma_\nu=1.0$，在相变点$x=y=0$的焦点变为不稳定了。$\bar{m}=n=20$时主方程定态解$P_{st}(m,n)_{max}=0.1323\times10^{-2}$

在图4.6中，表明了强的外引参数和内引参数所引起的相变。平均值很缓慢地趋于焦点 $x=y=0$（“临界慢化”），这是由于该焦点的趋向参数值变为不稳定的了。图4.6表明的定态分布，在相变点的朗之万径迹大的“临界涨落”使焦点附近的宽度变大。从图4.5到图4.6的转变是直观易懂的。因为选择了强的内引参数 $k\mu=k\nu=1.0$ 代替了 $k\nu=k\mu=0.5$，对每个人群来说，“保持一块儿”的团结已经增强了。这就使 $\mathcal{P}_\mu$ 和 $\mathcal{P}_\nu$ 的人群各自进行集体的迁移。相应地观察到了（图4.6）在均匀分布附

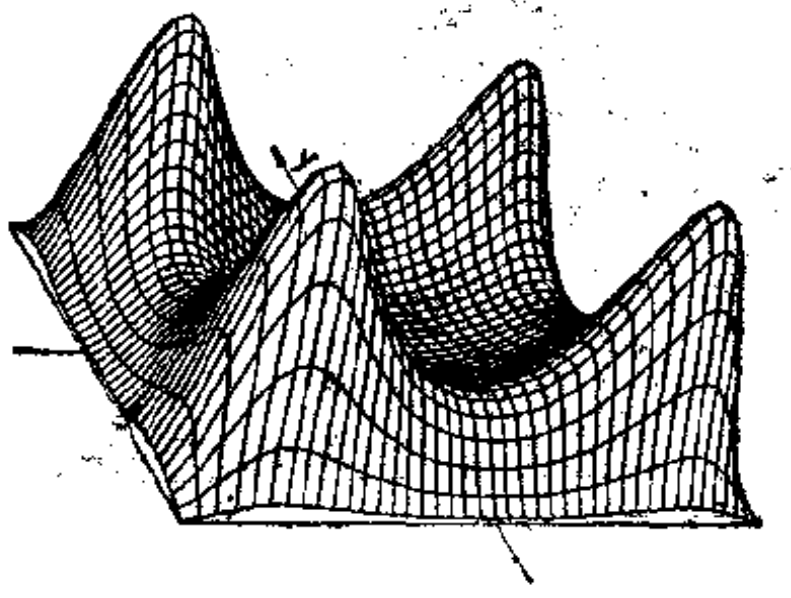


图4.7 趋向参数 $\pi_\mu=\pi_\nu=0$，$k_\mu=k_\nu=1.2$ 和 $\sigma_\mu=-\sigma_\nu=1.0$。有一个不稳定焦点 $x=y=0$，和一个极限环。$\bar{m}=\bar{n}=20$ 时主方程的定态解 $P_{st}(m,n)_{max}=0.1957\times10^{-2}$

近的非常大的涨落。

很强的内引参数以及在图4.5,6，同样强的对称的外引参数影响下产生了图4.7的构形。

我们可以看出，现在平均值趋于一个极限环（代替了稳定的焦点）。这种迁移是由于人群之间下述矛盾产生的。从市区1（即$P(\tau_0)\in D_{++}$）两人群集居的构形开始，人群$\mathscr{P}_v$——因为$\sigma_v<0$——趋向于回避$\mathscr{P}_\mu$而离开区1迁移并在区2集居，导致$\mathscr{P}_\mu$落后。这相当于一种$p(\tau_1)\in D_{+-}$的构形。但是，$\mathscr{P}_\mu$同样迟早会聚居在区2；构形现在成为$p(\tau_3)\in D_{--}$。至少在这个简单的模型中，如果重复这个过程就引起两人群返回市区1。在城市划分为多市区的实际模型中，这种迁移描述了某些大城市中由对称相互作用的各个社会态度人群的迁移所遗留下来的问题。

图4.7表明了集居在极限环附近的定态分布。

最后讨论图4.1～7。在（4.53）、（4.31）的近似特征上看，以上的评论是合理的。一般来说，用平均值方程（4.53）计算长时间的演变过程时，会降低结果的真实性。事实上，除图4.4外，定态分布的精确的唯一平均值是$x(\infty)=0$和$y(\infty)=0$，

定量社会 ④ 号机

但$\tau\to\infty$时，（4.53）的解终止在一个或另一个稳定的焦点或极限环。只要分布是单模的，精确平均值的解就会这样。

为了估算迁移过程的平均值和方差方程(4.53)、(4.31)中的单模分布能维持多长时间，作为一个计算实例，在合理选择初始方差的情况下，得到了如图4.7的计算结果。方差函数$S_{xx}(\tau)=m\sigma_{xx}(\tau)$，　　$S_{xy}(\tau)=\bar{m}\,\sigma_{xy}(\tau)$

$S_{yy}(\tau)=\bar{m}\,\sigma_{yy}(\tau)$的运动方程与$m=\bar{n}$的值无关（请看(4.31)）。当$\bar{m}\gg1$和适当的初始条件下，$|\sigma_{xx}(\tau)|\ll1$，$|\sigma_{xy}(\tau)|\ll1$和$|\sigma_{yy}(\tau)|\ll1$，在极限环上运动的几个循环中仍然有效。这就意味着，实质上分布仍然是单模，以及（4.53）、（4.31）仍然很好成立。在$x(\tau)\fallingdotseq0$和大的$|y(\tau)|$时得到了大的$\sigma_{xx}(\tau)$和小的$\sigma_{yy}(\tau)$；当大的$|x(\tau)|$和$y(\tau)\fallingdotseq0$时也得到了小的$\sigma_{xx}(\tau)$和大的$\sigma_{yy}(\tau)$。其形状仍然是单模。

在这一节要结束的时候，我们用另一种说法解释现在的模型，这说明，第三章的基本概念具有相当的灵活性。

一个基础科学家的团体，例如物理学家。科学家的“态度i”就代表“从事这个科学的领域i”。

如果有两个科学团体$\mathcal{P}_\mu$和$\mathcal{P}_\nu$：团体（最后较小）$\mathcal{P}_\nu$的成员主要研究新的领域或新的应用，团体（最后较大）$\mathcal{P}_\mu$的成员主要工作在现有领域的进一步探讨上。可以想象从$\mathcal{P}_\mu$到$\mathcal{P}_\nu$的突变或者相反的转变。团体从领域1到领域2变化的趋向可以用类似于（4.34）、（4.35）的趋向参数的方程来表征——假定$\pi_\mu = \pi_\nu = 0$（为了简化起见）：k_μ小，表示了$\mathcal{P}_\nu$成员表示的强的团体主义。σ_ν负，表明$\mathcal{P}_\nu$的成员希望研究新的领域，因此引起了主要团体$\mathcal{P}_\mu$的分化。k_μ大，表明$\mathcal{P}_\mu$的成员趋向于详细的有组织的研究上。σ_μ为正表示$\mathcal{P}_\mu$成员具有希望同$\mathcal{P}_\nu$去开发新的领域，并一起得到详细的结果的态度。

这些参数的选择引起了类似的而且比图4.7表明的还要普遍的运动，就参与的科学家的态度来说，描述的决不是哪个团体开发和占有新的科学领域的问题。

4-3 单个人群内的生灭过程

我们在这一节讨论纯生、灭过程。虽然在很多文献中已经探讨了这类模型，但在主方程的精确定

态或准定态解和确定论方法之间仍存在一些值得研究的问题。我们在这一节讨论这个关系以及在动物群体内一些考察结果的应用。在§3.2节将研究包括多步生、灭过程的随机规范模型。

随机描述和确定描述的关系

生灭过程人口发展模型是在主方程中保留$(\partial p/\partial t)\,BD(\vec{n};\ t)$项和去掉迁移项和 Volterra-Lotka项的另一种特殊情况。一个人群遵守下述方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp(0;t)}{dt}=\mu_1 p(1;\ t)\\
&\frac{dp(1;\ t)}{dt}=-(\lambda_1+\mu_1)p(1;\ t)+\mu_2 p(2;t)\\
&\cdots\cdots\\
&\frac{dp(n;\ t)}{dt}=\lambda_{n-1}p(n-1;t)-(\lambda_n+\mu_n)p(n;t)\\
&\qquad\qquad+\mu_{n+1}p(n+1;t)
\end{aligned}\right\}\tag{4.63}$$

假定出生率$\lambda_n=\omega(n+1,\ n)$和死亡率$\mu_n=\omega(n-1;\ n)$具有如下关系：

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_n = a_1 n \text{ 和 } \mu_n = a_2 n + b_2 n^2 \\ a_1 > 0,\ a_2 > 0 \text{ 和 } b_2 > 0\end{array}\right\} \quad (4.64a)$$

即

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_n = \lambda n \text{ 和 } \mu_n = \mu n + \dfrac{(\lambda-\mu)}{K} n^2 \\ \lambda > \mu,\ \lambda > 0,\ \mu > 0 \text{ 和 } K > 0\end{array}\right\} \quad (4.64b)$$

每个个体的死亡率μ_n/n随着n的增长而增大，比如由于食物来源的限制。同样，当n增长时，出生率λ_n/n将减少。

在一般情况下，这些方程满足细致平衡的条件。参照(4.39)，便得到精确定态解的公式：

$$p_{st}(n) = p_{st}(0)\prod_{k=1}^{n}\xi(k) = p_{st}(0)\delta_{n0} \quad (4.65)$$

其中：

$$\xi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} = \frac{n-1}{n}\ \frac{a_1}{a_2 + b_2 n} \quad (4.66)$$

这个解表示一个人群完全灭绝了。该解是稳定的，因为“从零到零”。除了这个解外，还存在一个消亡非常慢的准定态解。

在传统的近似中，准定态解是由(4.66)中忽略了$\frac{n-1}{n}$，并将近似因子：

$$\xi_{as}(n)\approx\frac{\lambda_n}{\mu_n}=\frac{a_1}{a_2+b_2n} \tag{4.67}$$

代入(4.65)来确定的。此时，

$$\left.\begin{aligned}p_{as}(n)&=p_{as}(0)\prod_{k=1}^{n}\xi_{as}(k)\\&=p_{as}(0)\exp\left[-\Psi(n)\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.68}$$

其中：

$$\Psi(n)=-\sum_{k=1}^{n}\ln\left[\xi_{as}(k)\right]\approx-\int_0^n dk\ln\left[\xi_{as}(k)\right]$$

在大n时进行渐近修正，便得到了(4.63)的准定态解。

用下式来确定$p_{as}(n)$的最大值$\bar{n}$：

$$\left.\frac{\partial\psi(n)}{\partial n}\right|_{n=\bar{n}}=-\ln\left[\xi_{as}(\bar{n})\right]=0 \tag{4.69a}$$

即：

$$\xi_{as}(\bar{n})=1 \quad \text{由此，} \bar{n}=(a_1-a_2)/b_2 \tag{4.69b}$$

用在$n=\bar{n}$附近的$\Psi(n)$的表示式取$p_{as}(n)$的近似式：

$$\left.\begin{aligned}p_{as}(n)&=p_{as}(0)\exp\left\{-\left[\Psi(\bar{n})+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi(\bar{n})}{\partial\bar{n}^2}(n-\bar{n})^2+\cdots\right]\right\}\\&=\frac{C}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma}\right\},\quad n\geqslant 0\\p_{as}(n)&=0,\qquad\qquad n<0\end{aligned}\right\} \tag{4.70}$$

这样便可得到分布的标准偏差σ：

$$\sigma = \left\{\frac{\partial^2 \Psi(n)}{\partial n^2}\right\}^{-1}_{n=\bar{n}} = -\left\{\frac{\partial \xi_{n-1}(n)}{\partial n}\right\}^{-1}_{n=\bar{n}}$$

$$= \frac{a_1}{b_2} = \frac{\lambda}{(\lambda-\mu)}\bar{n} \qquad (4.71)$$

但是，这个惯用的准定态分布(4.68)或(4.70)式，若在小n时忽略$\frac{n-1}{n}$便得到了完全错误的结果。我们将会看到，在小n情况下，准定态解的完全灭绝的概率由精确公式来确定。因而(4.63)的准定态解应该用下面的近似会更好：

$$\left.\begin{aligned} p_{qs}(n) &= p_{qs}(1)\prod_{k=2}^{n}\xi(k), \quad n \geqslant 1 \\ p_{qs}(n) &= 0 \qquad\qquad\qquad n = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.72)$$

以及精确因子：

$$\xi(n) = \frac{n-1}{n}\,\frac{a_1^*}{a_2^* + b_2^* n} \qquad (4.73)$$

一起来确定。为了把$p_{qs}(n)$和$p_{n-1}(n)$进行比较，为了在同一点$n=\bar{n}$得到$p_{n-1}(n)$和$p_{qs}(n)$的极大值，使用了比率常数：

$$\left.\begin{aligned} &a_1^* = \frac{\bar{n}}{\bar{n}-1}a_1,\ a_2^* = a_2 \text{ 和 } b_2^* = b_2 \\ &\text{即：} \\ &\lambda^* = \frac{K}{K-1}\lambda > \lambda,\ \mu^* = \mu, \text{ 和 } K^* = \frac{K}{K-1}\left(K + \frac{\mu}{\lambda - \mu}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4.74)$$

如果$p_{qs}(n)$归一化为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{qs}(n) = 1$$

便从(4.72)得到了$p_{qs}(1)$的值为

$$p_{qs}(1) = \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \prod_{k=2}^{n} \xi(k)\right]^{-1} \quad (4.75)$$

分布$p_{qs}(n)$的转折值仍由

$$\xi(n) = 1 \quad (4.76)$$

来确定，它具有两个正解：

$$n_{\pm} = \frac{K^*}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\lambda^*}{\lambda^* - \mu^*} \cdot \frac{1}{K^*}}\right)$$

当

$$K^* > 4\frac{\lambda^*}{\lambda^* - \mu^*} \quad (4.77)$$

假定$K^* \gg 4\frac{\lambda^*}{\lambda^* - \mu^*} > 1$，并将根展开得到：

$$n_+ \doteq K^* - \frac{\lambda^*}{\lambda^* - \mu^*}$$

和

$$n_- \doteq \frac{\lambda^*}{\lambda^* - \mu_*} \qquad (4.78)$$

容易证明，n_-在$\bar{n}$处得到$p_{qs}(n)$的一个极大值，而$n_- \equiv n^* \ll \bar{n}$处得到一极小值。在图4.8中，以传统的方程得到了修正的准定态解$p_{1s}(n)$和$p_{as}(n)$，并在具体率为常数值的情况下比较了$p_{qs}(n)$和$p_{as}(n)$分布和矩的时间径迹定义为：

$$\langle n^l \rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} n^l p(n;\ t) \qquad (4.79)$$

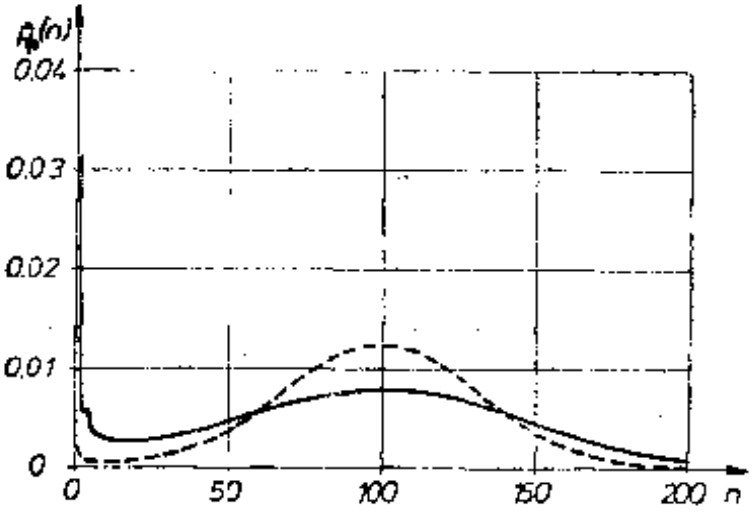


图4.8 在$a_1 = 0.5587$，$a_1^* = 0.5642$，$a_2 = 0.5820$和$b_2 = 2.622 \cdot 10^{-4}$，$n^* = 21$和$\bar{n} = 102$时，两种近似的准定态分布$p_{qs}(n)$(--)和$p_{as}(n)$(···)的比较。

由方程(4.13)便得到平均值$\langle n\rangle_t$和方差$\sigma(t)=\langle n^2\rangle_t-\langle n\rangle_t^2$的方程：

$$\frac{d\langle n\rangle_t}{dt}=\langle\lambda_n-\mu_n\rangle_t \tag{4.80}$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt}=2(\langle n\lambda_n\rangle_t-\langle n\mu_n\rangle_t)+(1+2\langle n\rangle_t)\langle\mu_n\rangle_t \tag{4.81}$$

在初始条件：

$$\langle n\rangle_{t=0}=n_0 \quad 和 \quad \sigma(t=0)=\sigma_0 \tag{4.82}$$

下求解。方程(4.80)、(4.81)不是闭合的。但只要它的分布保持单模，便可用以下近似：

$$\langle\lambda_n\rangle\approx\lambda_{\langle n\rangle} \qquad \langle\mu_n\rangle\approx\mu_{\langle n\rangle} \tag{4.83}$$

将(4.83)代入(4.80)、(4.81)，并利用(4.64b)便导出$\langle n\rangle$和$\sigma(t)$的闭合方程：

$$\frac{d\langle n\rangle}{dt}=\gamma\langle n\rangle\left(1-\frac{\langle n\rangle}{K}\right) \tag{4.84}$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt}=(2\lambda-\gamma)\langle n\rangle+\frac{\nu}{K}\langle n\rangle_t^2+2\gamma\sigma(t)\left(1-\frac{2\langle n\rangle}{K}\right) \tag{4.85}$$

这里的$\gamma=(\lambda-\mu)$是人口的净增长率，K是它的"容量"。方程(4.84)是著名的Verhulst和Pearl对数方程，其解为：

$$\langle n\rangle = K\left[1+\frac{K-n_0}{n_0}\exp(-\gamma t)\right]^{-1} \qquad (4.86)$$

由此得到：

$$\langle n\rangle_0 = n_0 \qquad \langle n\rangle_\infty = K \qquad (4.87)$$

将(4.86)代入(4.85)后便可求解方差方程。再者，也可看出(4.85)的定态解是：

$$\sigma(\infty) = \frac{\lambda}{\gamma}K = \frac{a_1}{b_2} \qquad (4.88)$$

与解$p_{st}(n)$的方差（4.71）是一致的。

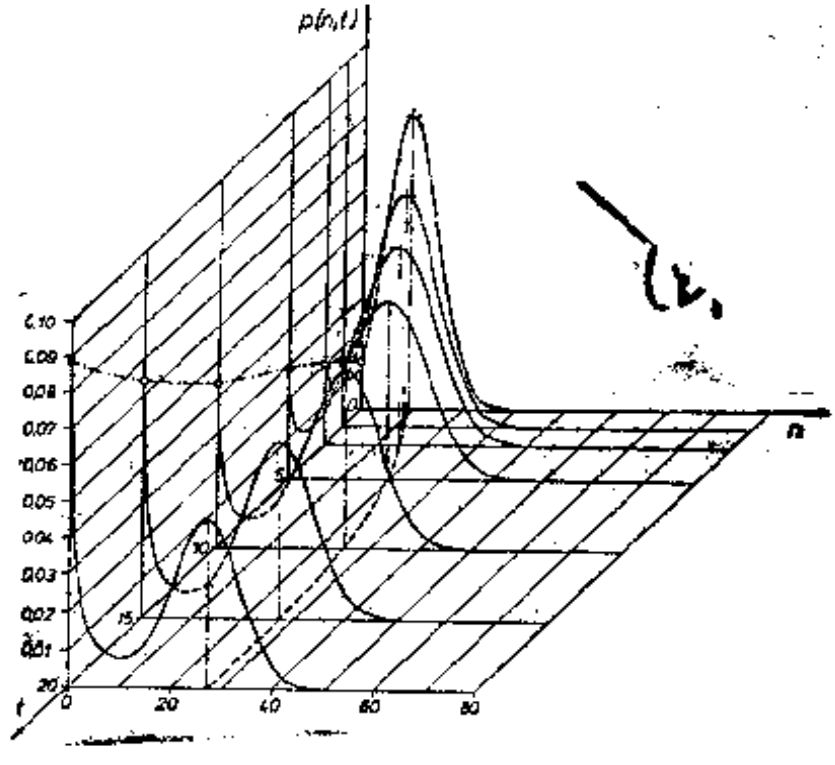


图4.9 参数$\lambda=0.5$，$\mu=0.2$和$b_2=0.01$时主方程(4.63)的解的图示。表明了概率分布随时间的变化情况。

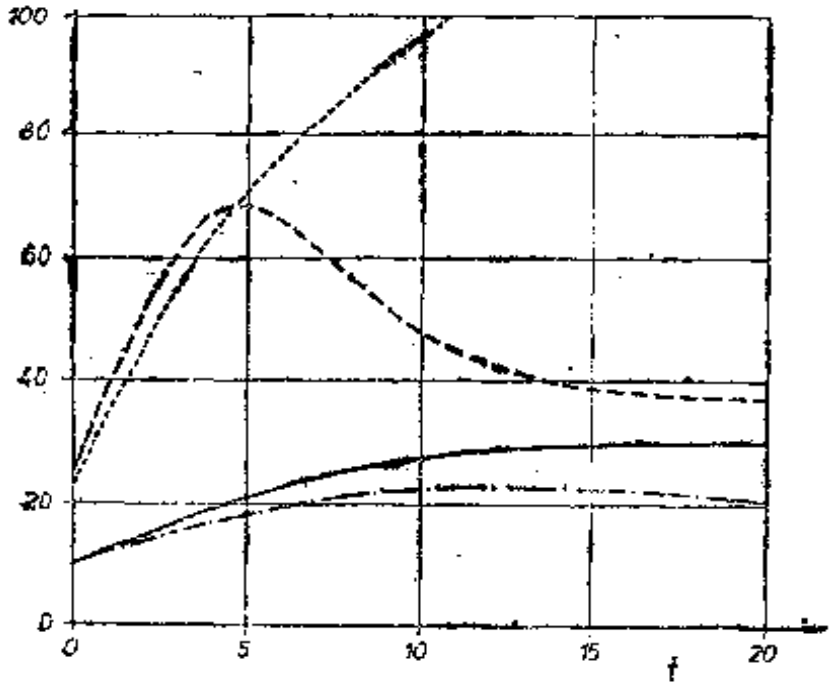


图4.10　参数$\lambda=0.5$，$\mu=0.2$和$b_2=0.01$时的平均值$\langle n\rangle_t$和方差$\sigma(t)$的时间径迹。

（—·—·—）$\langle n\rangle_t$　精确

（· · ·）$\sigma(t)$　精确

（——·····）$\langle n\rangle_t$　近似方程（4.84）的解

（— — —）$\sigma(t)$　近似方程（4.85）的解

方程（4.84）、（4.85）和它的解是从(4.83)的近似得到的，它只适用于单模的概率分布。但与假定相反，任何初始的单模分布首先发展为图4.8所表明的双峰准定态解$p_{qs}(n)$，最后变为一种人口灭绝的精确定态解。因此可以从（4.84,85）来预料实际时间径迹的变化。通过精确主方程（4.63）（参数$\lambda=0.5$，$\mu=0.2$和$b_2=0.01$）模型的计算

进一步证实了人口发展的这种情况（图4.9,10）。图4.9表明，开始为正态分布但很快发展为双峰准定态分布$p_{qs}(n)$形式的时间变化。图4.10中，在同样的模型参数下比较了平均值$\langle n\rangle_t$和方差$\sigma(t)$的精确径迹和求解近似方程（4.84，85）所得到的径迹。

最后，在计算灭绝过程和估算准定态分布的生存时间（寿命）时用了kramers和van kampen的想法。人口仍然存在或经时间t灭绝的概率$\pi_1(t)$和$\pi_0(t)$为：

$$\left.\begin{aligned}\pi_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p(n;t)\\ \pi_0(t) &= p(0;t)\\ \pi_0(t)+\pi_1(t) &= 1\end{aligned}\right\} \qquad (4.89)$$

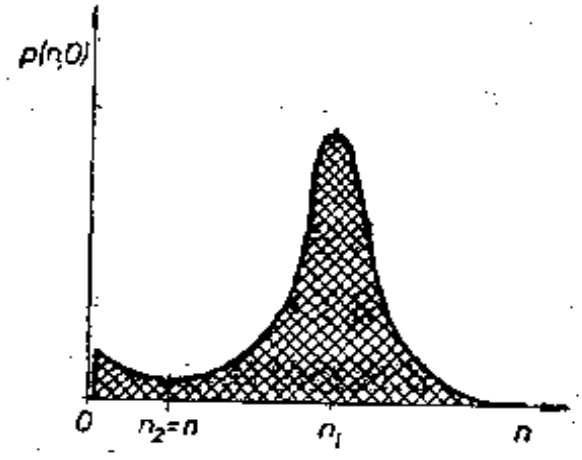
由主方程直接得出：

$$\frac{d\pi_0}{dt} = -\frac{d\pi_1}{dt} = \mu_1 p(1;t) \qquad (4.90)$$

假定在$t=0$，$\pi_0(0)=0$，$\pi_1(0)=1$时，由（4.72）得到了准定态解$p_{qs}(x)$。因为从生存转为灭绝状态的概率变化很慢，可以假定在该过程中准定态分布的形式保持不变，而且每种生存的或非灭绝状态$p(n;t)$的权重同$\pi_1(t)$成正比地减少。即：

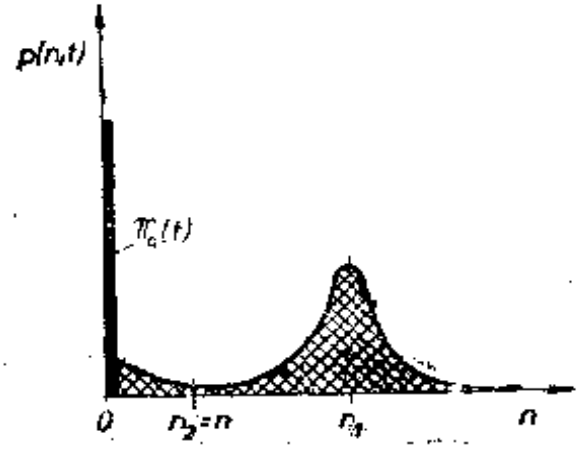
$$p(n,t)=\pi_1(t)\cdot p_{qs}(n) \quad n=1,2,\cdots\infty \tag{4.91}$$

它的初始状态以及从生存转变为灭绝状态的过程参看图4.11。



a

图4.11 (a) $P(0,0)=0$, $P(n,0)=P_{qs}(n)$ $n=1,2\cdots\infty$, $\pi_0(0)=0$和$\pi_1(0)=1$时系统的初始状态。



(b)从生存状态转变为灭绝状态的概率$P(0,t)=\pi_0(t)$和$P(n,t)=\pi_1(t)P_{qs}(n)$, $n=1,2,\cdots\infty$

将n＝1时的（4.91）代入(4.90)便得到$\pi_1(t)$的运动方程：

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = -\mu_1 p_{qs}(1)\pi_1(t) \equiv -\frac{1}{\tau}\pi_1(t) \tag{4.92}$$

以及准定态分布的平均寿命：

$$\tau_{qs} \equiv [\mu_1 p_{qs}(1)]^{-1} = \mu_1^{-1}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\prod_{k=2}^{n}\xi(k)\right] \tag{4.93}$$

继续用近似关系便得：

$$\tau_{qs} = \left[\mu_1 p_{qs}(1)\right]^{-1} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma}}{\mu_1 C}\exp\left(\frac{\bar{n}^2}{2\sigma}\right) \tag{4.94}$$

反过来说，用（4.93）得到的寿命小于（4.94）的计算寿命，因为在$p_{qs}(n)$中忽略了在n＝1时的小模。

正如在图4.10中看到的那样，平均值的精确径迹和(4.84)的径迹并不相同。尤其是，不能用（4.84）描述$\langle n\rangle_t$的灭绝特性。但是在$\langle n\rangle_t$的修正方程中包括着这些特性，其方程是：

$$\frac{d\langle n\rangle}{dt} = \gamma\langle n\rangle\left(1 - \frac{\langle n\rangle}{K}\right)\frac{\langle n\rangle - n^*}{\langle n\rangle + n^*} \tag{4.95}$$

在此，在t = 0时$\langle n\rangle$，灭绝的邻界值是$\langle n\rangle_0 = n^*$。

现在我们希望把理论值和实际值进行比较。但这个模型并不完全符合人类的实际情况，因为人口

表4.3　春天时加拿大的天鹅数

年代	天鹅总数n	出生小鹅的λ_n	猎取鹅数($<\mu_n$)
1945	92	58	
1946	70	43	
1947	130	58	
1948	138	43	
1949	186	91	
1950	164	110	154
1951	74	70	45
1952	74	46	44
1953	60	33	9
1954	65	60	26
1955	166	79	121
1956	60	90	36
1957	50	9	35
1958	102	33	44
1959	137	61	73
1960	89	49	48
1961	115	67	22
1962	50	38	29

$\sigma = 2131$　$\langle n\rangle = 102$　$\langle\lambda_n\rangle = 57$　$\langle\mu_n\rangle$狩猪 = 52.7

的发展还受到对出生的控制、医疗设备条件、法律等因素。因此该模型适用于自然的准定态的动物群，在表4.3中进行了比较。

在此直接从三个测量量$\langle n\rangle = 102$，$\sigma = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = 2131$和出生率$\langle\lambda_n\rangle = 57$来确定系统参数$a_1$、$a_2$，b或$\mu$，$\lambda$，k，以此作为观察量。此外，还找到了死亡率$\langle\mu_n\rangle \doteq 52.7$。当考虑到整个死亡率应该远大于猎取的死亡率时，这个值便符合得很好。利用上面导出的关系式（4.64a）、(4.69b)、(4.71)、（4.88），即：

$$\frac{\langle\lambda_n\rangle}{\langle n\rangle} = a_1 \quad \langle n\rangle = \frac{a_1 - a_2}{b_2} \quad \sigma = \frac{a_1}{b_1} \tag{4.96}$$

通过代入观察量便可得到：

$$a_1 = 0.5587 \quad a_1^* = 0.5642 \quad a_2 = 0.5320$$
$$b_2 = 2.622 \cdot 10^{-4} \tag{4.97}$$

实际上，人们通过比较准定态分布的两个近似$p_{qs}(n)$和$p_{as}(n)$得到了精确参数。再把它们用到(4.93)、(4.94)来确定人的平均寿命：

$$\tau_{qs} = 77\text{年} \qquad \tau_{as} = 2323\text{年} \tag{4.98}$$

这里的τ_{qs}值是实际的大小，而非实际的值τ_{as}是由于一般近似的缺陷造成的。我们用准定态解得到了

好的近似，这表明主方程是能够描述小涨落时的实际情况的。

多步生灭过程*

现在我们用方程(3.15～21)探讨多步生灭过程的模型。在此仅限于讨论，当一个个体死亡时同时有g(g=1、2、……G)个个体出生。

$$\left.\begin{aligned}&\mu_n \equiv \omega(n-1,n)>0 \qquad n=1,2,\cdots\\&\lambda_n^{(g)} \equiv \omega(n+g,n)>0 \quad n=1,2,\cdots\\&\qquad\qquad\qquad\qquad g=1,\ 2,\ \cdots G\end{aligned}\right\} \quad (4.99)$$

转移概率是非零的。假定主方程（4.63）的普遍形式是：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp(n;\ t)}{dt} &= \sum_{g=1}^{G} \lambda_{n-g}^{(g)}\, p(n-g;\ t)\\&\quad + \mu_{n+1}p(n+1;t) - \Gamma(n)p(n;\ t)\end{aligned}\right\} \quad (4.100)$$

简写符号：$\Gamma(n) \equiv \mu_n + \sum_{g=1}^{G} \lambda_n^{(g)}$

$$n=0,1,2,\cdots\infty$$

容易证明，多步过程一般不满足细致平衡的条件，

因此多步过程的定态解不用(4.39)的形式。

求解的步骤中要用到多步情况下仍然有效的守恒定律：从主方程的一般形式出发：

$$\frac{dp(i;t)}{dt}=\sum_{j}[\omega(i,j)p(j;t)-\omega(j,i)p(i;t)] \tag{4.101}$$

状态i，j…可以分为A和B两个集合。引入状态A和B集合的概率

$$\left.\begin{aligned}P(A;t)&=\sum_{i\in A}P(i;t)\\P(B;t)&=\sum_{i\in B}P(j;t)\end{aligned}\right\} \tag{4.102}$$

以及在两集合间的概率流：

$$\left.\begin{aligned}j(B\leftarrow A;t)&=\sum_{i\in B}\sum_{\in A}\omega(j,i)P(i;t)\\j(A\leftarrow B;t)&=\sum_{\in A}\sum_{i\in B}\omega(i,j)P(j;t)\end{aligned}\right\} \tag{4.103}$$

在(4.101)两边按$\sum_{i\in A}$或$\sum_{i\in B}$取和便导出关系式：

$$\frac{dp(A;t)}{dt}=-\frac{dp(B;t)}{dt}=j(A\leftarrow B;t)-j(B\leftarrow A;t) \tag{4.104}$$

在定态时可化为

$$j_{st}(A \leftarrow B) = j_{st}(B \leftarrow A) \qquad (4.105)$$

将上式用到主方程(4.100)以及集合$A = \{1, \cdots n-1\}$和$B = \{n, \cdots \infty\}$，便得到关系式：

$$\mu_n p_{qs}(n) = \sum_{g=1}^{G} \wedge_{n-g}^{(g)} \; p_{qs}(n-g) \qquad (4.106)$$

和

$$\wedge_n^{(g)} = \sum_{\gamma=g}^{G} \lambda_n^{(\gamma)} \qquad (4.107)$$

当$\mu_1 = 0$导出了（$n = 1, 2, \cdots \infty$）的稳定分布，正好是单步的主方程。方程（4.106）比定态主方程（4.100）更简单，只用集合（G+1）的概率就可表示出集合（G+2）的概率。诚然，（4.106）可以用来导出一种连续系数表示式，将$p_{qs}(n)$表示式（4.72）推广到多步情况。引入率：

$$\eta_n = \frac{p_{qs}(n-1)}{p_{qs}(n)}, \qquad n = 2,3, \cdots \infty \quad (4.108)$$

因此

$$p_{qs}(n) = p_{qs}(1) \left[\prod_{\nu=2}^{n} \eta_\nu\right]^{-1} \qquad n = 2,3, \cdots \infty \qquad (4.109)$$

用$P_{qs}(n)$除（4.106）的两边之后接着得到：

$$\mu_n = \sum_{g=1}^{G} \Lambda_{n-g}^{(g)} \prod_{\mu=1}^{g} \eta_{n+1-\mu} \qquad (4.110a)$$

或：

$$\eta_n = \frac{\mu_n}{\left(\Lambda_{n-1}^{(1)} + \sum_{g=2}^{G} \Lambda_{n-g}^{(g)} \prod_{\mu=2}^{g} \eta_{n+1-\mu} \right)} \qquad (4.110b)$$

如果 $\mu_1 = 0$，便由（4.110b）得到有限个连续系数η_n的表示式。最初的：

$$\eta_1 = 0, \qquad \eta_2 = \frac{\mu_2}{\Lambda_1^{(1)}} \qquad (4.111)$$

利用（4.110b），可以递推地确定η_n（以及此后的$P_{qs}(n)$）。当 G = 1时（只有单步过程）便得：

$$\eta_n = \frac{\mu_n}{\Lambda_{n-1}^{(1)}} = \frac{\mu_n}{\lambda_{n-1}^{(1)}} \qquad (4.112)$$

在这种情况下，正如预料的那样，（4.109）简化为（4.72）和（4.66），现在将一般的多步解（4.109）写为：

$$p_{q_0}^{(G)}(n) = p_{q_0}^{(G)}(1)\exp[-\Phi(n)]$$

其中：

$$\Phi(n) = \sum_{\nu=2}^{n} \ln(\eta_\nu) \approx \int_1^n d\nu \ln[\eta(\nu)]$$

（4.113）

可与单步解$p_{0s}(n)$的（4.68）进行比较。推广（4.64a）对生、灭率所作的假定：

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_n^{(g)} = a_1^{(g)} n, \qquad g=1,2,\cdots,G \\ &\mu_n = a_2 n + b_2 n^2 \end{aligned}\right\} \quad (4.114)$$

当然，$p_{q_0}^{(G)}(n)$的最大值通过与（4.69a,b）类似的方法确定：

$$\left.\frac{\partial \Phi(n)}{\partial n}\right|_{n=\bar{n}} = \ln[\eta(\bar{n})] = 0 \qquad (4.115a)$$

或：

$$\eta(\bar{n}) = 1 \qquad (4.115b)$$

把$\bar{n}$的这个条件代入连续系数表示式（4.110b），并假定η_n和$\Lambda_{\bar{n}}$是慢变化的，即$\Lambda_{\bar{n}-\mu} \approx \Lambda_{\bar{n}}$和$\eta_{\bar{n}+1-\mu} \approx \eta_{\bar{n}} = 1$，便得：

$$1 = \frac{\mu_{\bar{n}}}{\sum_{g=1}^{G} \Lambda_{\bar{n}}^{(g)}} = \frac{\mu_{\bar{n}}}{\sum_{g=1}^{G} g\Lambda_{\bar{n}}^{(g)}}$$

（4.116）

或利用（4.114）

$$\bar{n} = \frac{\sum_{g=1}^{G} g_{a1}{}^{g} - a_2}{b_2} \qquad (4.117)$$

比较（4.117）和（4.69b），很显然：

$$\sum_{g=1}^{G} g_{a1}{}^{g} = a_1 \qquad (4.118)$$

上面推导的目的是为了得到在单步生和多步生过程两种情况下在同一点 $n = \bar{n}$ 的分布的极大值。

类似于（4.71）可确定 $P_{q_0}{}^{(G)}(n)$ 的偏差为：

$$\sigma_G = \left[\frac{\partial^2 \Phi(n)}{\partial n^2} \right]^{-1}_{n=\bar{n}}$$

$$= \left[\frac{\partial \eta(n)}{\partial n} \right]^{-1}_{n=\bar{n}} \qquad (4.119)$$

通过重复（4.110b）微分近似公式便得到 $\eta(n)$ 的微商：

$$\sum_{g=1}^{G} \Lambda_{a}{}^{g} \eta_{\Sigma}^{g} \approx \mu_n \qquad (4.120)$$

当 $n = \bar{n}$ 时（其中 $\eta_{\bar{n}} = 1$），（利用 $\partial_n = \partial/\partial_n$）便得到了这个微商

$$\partial_{\bar{n}}\ \eta_{\bar{n}}^{-} = \frac{\partial_{\bar{n}}\mu_{\bar{n}}^{-} - \sum_{g=1}^{G} \partial_{\bar{n}}\Lambda_{n}^{(g)}}{\sum_{g=1}^{G} g\,\Lambda_{\bar{n}}^{-(g)}} \qquad (4.121)$$

把这个结果代入（4.119）并利用（4.107，114，117），便得到多步生分布的偏差：

$$\sigma_G = \frac{\sum_{g=1}^{G} g\left(\sum_{\nu=g}^{G} a_1^{(\nu)}\right)}{b_2}$$

$$= \frac{\sum_{g=1}^{G} \frac{g(g+1)}{2} a_1^{(g)}}{b_2} \qquad (4.122)$$

可与单模的偏差（4.71）进行比较，使用等效的总出生率（4.118）得：

$$\sigma_{G-1} = \frac{a_1}{b_2} = \frac{\sum_{g=1}^{G} g a_1^{(g)}}{b_2} \qquad (4.123)$$

比率σ_G/σ_1大于1，并随多步过程的权重而增大。现在已经得到了分布宽度增大的具体公式，多步过程总比单步过程具有较高阶函数。在图4.11中给出了这两种分布：

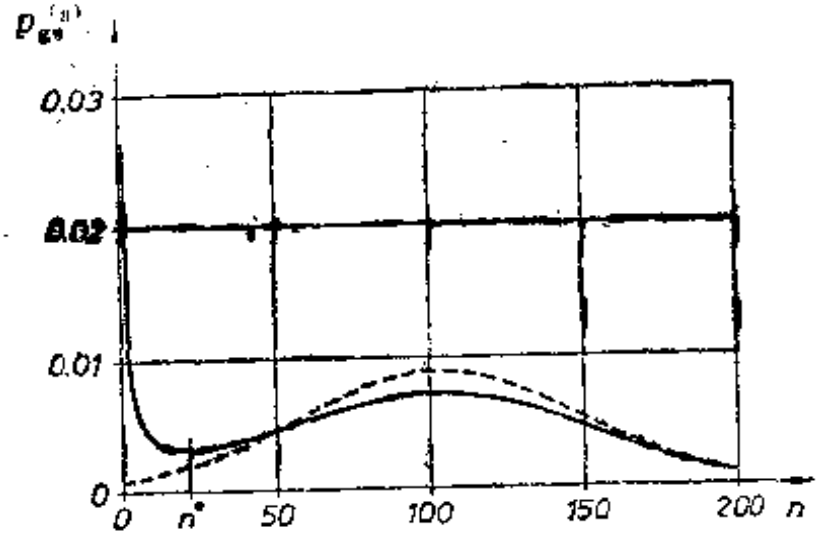


图4.11 三步生（实线）和单步出生（虚线）分布的比较。

1>（4.113）的分布$P_{qs}^{(3)}(n)$是由三步生过程产生的，其平均值$\overline{n}$和方差σ与单步出生分布的$P_{qs}(n)$的$\overline{n}$和σ是一致的。三步生分布$P_{qs}^{(3)}(n)$在小n时出现了新的精细结构，而在单出生分布$P_{qs}(n)$中并没有这种结构。

2>仅由单步出生过程产生的分布$P_{qs}^{(1)}(n)$，采用对应于$P_{qs}^{(3)}(n)$的相同的平均值$\overline{n}$和生、灭率。分布$P_{qs}^{(1)}(n)$比$P_{qs}^{(3)}(n)$的偏差明显小，这是由于单步出生过程中的涨落较小的缘故。

通过计算准定态分布$P_{qs}^{(1)}(n)$和$P_{qs}^{(3)}(n)$的平均寿命，得到：

$\tau^{(1)} = 1460$年　　$\tau^{(3)} = 79$年

后者更切合实际。

4-4 两物种之间的迁移和捕食者—被捕食者的相互作用

正如上节那样，试图在老问题中加进新的内容：两物种之间的相互作用是个老问题。本节中的发展是把非线性迁移和捕食者—被捕食者结合在一起研究。研究这种结构可以预见一些有用的结果：

纯Volterra—Lotka模型得出一种数学的临界情况：奇点（＝定态状态）是闭合轨道围绕的中心。下文中讨论的是依赖于初始条件的非定态解。它与理论力学中的无阻尼哈密顿系统的解相类似。因此原来的模型对不同原因引起的小的扰动是敏感的。另一方面，生物学家在自然界的几个全然不同的物种中已经考查到了Volterra-Lotka循环。应当着重指出，这种循环依赖于有效的恰当的迁移结构。

纯Volterra-Lotka模型与非线性迁移结合就会产生多种解的复杂景象，尤其是迁移和捕食者—被

捕食者结合的一种“混合状态”出现了纯 Volterra-Lotka循环的极限环，而且极限环是稳定的，并且与初始条件无关。

特殊模型的主方程和平均值方程

假定有两种环境，开放的环境1和隐蔽的环境2。被捕食的物种可以在两种环境之间迁移，而捕食者物种只能在开放环境1。显然，一种简单的社会构形由三个整数构成，可以到达环境1和2的被捕食的动物的数目m_1和m_2，以及在环境1的捕食者的动物数目$n_1 \equiv n$。用$\mathcal{P}_\alpha$和$\mathcal{P}_\beta$表示被捕食者和捕食者的群体，按照构形分布得到转移概率：

$\mathcal{P}_\alpha$的迁移：

$$\begin{aligned}\omega^{\alpha}_{21}[-1,\ 1,\ 0;\ m_1,\ m_2, n] &= m_1\mu_{21}(m_1,\ m_2,\ n)\\ \omega^{\alpha}_{12}[1,\ -1,\ 0;\ m_1,\ m_2,\ n] &= m_2\mu_{12}(m_1,\ m_2,\ n)\end{aligned} \tag{4.124}$$

迁移概率公式是：

$$\left.\begin{aligned}\mu_{12}(m_1,m_2,n)&=\hat{v}\exp[u(m_1,m_2,n)]\\ \mu_{21}(m_1,m_2,n)&=\hat{v}\exp[-u(m_1,m_2,n)]\\ u(m_1,m_2,n)&=[\hat{\delta}+\hat{\alpha}(m_1-m_2)-\hat{\beta}n]\end{aligned}\right\}$$

(4.125)

根据它们的实际关系，对趋向参数 $\hat{v}$，$\hat{\delta}$ $\hat{\alpha}$和 $\hat{\beta}$ 作如下命名：

$\hat{v}$：灵活性参数；

$\hat{\delta}$：偏好参数；

$\hat{\alpha}$：$\mathcal{P}_\delta$的聚集参数；

$\hat{\beta}$：恐惧参数($\mathcal{P}_\delta$恐惧$\mathcal{P}_\beta$)

在群体$\mathcal{P}_\delta$和$\mathcal{P}_\beta$中的生、灭过程：

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^\delta{}_+[1,0,0;m_1,m_2,n]&=m_1\beta_1^\delta\\ \omega_1^\delta{}_-[-1,0,0;m_1,m_2,n]&=m_1\delta_1^\delta+m_1^2v_1^\delta\end{aligned}\right\}$$

(4.126a)

$$\left.\begin{aligned}\omega_2^\delta{}_+[0,1,0;m_1,m_2,n]&=m_2\beta_2^\delta\\ \omega_2^\delta{}_-[0,-1,0;m_1,m_2,n]&=m_2\delta_2^\delta+m_2^2v_2^\delta\end{aligned}\right\}$$

(4.126b)

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^\beta{}_+[0,0,1;m_1,m_2,n]&=n_1\beta_1^\beta\\ \omega_1^\beta{}_-[0,0,-1;\ m_1,\ m_2,n]&=n\delta_1^\beta+n_2v_1^\beta\end{aligned}\right\}$$

(4.126c)

在$\mathscr{P}_\delta$和$\mathscr{P}_\beta$之间的捕食者—被捕食者的相互作用：

$$\omega_i^{\delta\beta}[-1,0,1;m_1,m_2,n]=m_i n v_{\delta\beta} \tag{4.127}$$

为方便起见，将模型中的参数加以简化或以数字表示，即

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_1^\delta=\beta_2^\delta=k_1, && \gamma_2^\delta=\omega\\
&v_{\delta\beta}=\nu, && \delta_1^\beta=k_2\\
&\delta_1^\delta=\delta_2^\delta=0, && \nu_1^\beta=0\\
&\beta_1^\beta=0, && \nu_1^\beta=0
\end{aligned}\right\} \tag{4.128}$$

整个构形的转移概率$\omega[k_1,k_2,k_3;m_1,m_2,n]$是各个分过程（详见（4.5）式）转移概率(4.124)、(4.126)和(4.127)的和。

社会构形概率分布$P(m_1,m_2,n;t)$的主方程与(4.6)的形式相同，即

$$\begin{aligned}
\frac{dp(m_1,m_2,n;t)}{dt}&=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{B}(m_1,m_2,n;t)\\
&+\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{BD}(m_1,m_2,n;t)\\
&+\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{VL}(m_1,m_2,n;t)
\end{aligned} \tag{4.129}$$

方程右边三项的具体公式是

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{M}(m_1,m_2,n;t)$$

$$=(m_1+1)\mu_{21}(m_1+1,m_2-1,n)p(m_1+1,m_2-1,n;t)-m_1\mu_{21}(m_1,m_2,n)p(m_1,m_2,n;t)+(m_2+1)\mu_{12}(m_1-1,m_2+1,n)p(m_1-1,m_2+1,n;t)-m_2\mu_{12}(m_1,m_2,n)p(m_1,m_2,n;t) \quad (4.130)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{BD}(m_1,m_2,n;t)$$

$$=k_1(m_1-1)p(m_1-1,m_2,n;t)-k_1m_1p(m_1,m_2,n;t)+k_1(m_2-1)p(m_1,m_2-1,n;t)-k_1m_2p(m_1,m_2,n;t)+\omega(m_2+1)^2p(m_1,m_2+1,n;t)-\omega m_2^2p(m_1,m_2,n;t)+k_2(n+1)p(m_1,m_2,n+1;t)-k_2np(m_1,m_2,n;t) \quad (4.131)$$

和

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{VL}(m_1,m_2,n;t)$$

$$=\nu(m_1+1)(n-1)p(m_1+1,m_2,n-1;t)-\nu m_1np(m_1,m_2,n;t) \quad (4.132)$$

根据（4.14）便可从主方程（4.129）（只讨论单模分布）得到$\tilde{x}\equiv\langle m_1\rangle_t$，$\tilde{y}\equiv\langle m_2\rangle_t$和$\tilde{z}\equiv\langle n\rangle_t$的近似的闭合方程：

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = -\left[\tilde{x}\mu_{21}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) - \tilde{y}\,\mu_{12}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right] + k_1\tilde{x} - \nu\,\tilde{x}\cdot\tilde{z} \qquad (4.133a)$$

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = +\left[\tilde{x}\mu_{21}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) - \tilde{y}\mu_{12}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) + k_1\tilde{y}\right] - \omega\tilde{y}^2 \qquad (4.133b)$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = -k_2\tilde{z} + \nu\,\tilde{x}\,\tilde{z} \qquad (4.133c)$$

变换为标度变量和标度时间

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k_2}{\nu}\tilde{x}\ ,\quad y = \frac{k_2}{\nu}\tilde{y} \\ z &= \frac{k_1}{\gamma}\ \tilde{z},\quad \tau = k_1 t \end{aligned}\right\} \qquad (4.134)$$

以及标度趋向参数

$$\left.\begin{aligned} &\nu = \frac{\hat{\nu}}{k_1},\quad \delta = \hat{\delta},\quad \alpha = \frac{\nu}{k_2}\ \hat{\alpha}, \\ &\beta = \frac{\nu}{k_1}\hat{\beta},\quad \frac{1}{y_0} = \frac{\omega}{k_1}\cdot\frac{k_2}{\nu},\quad a = \frac{k_2}{k_1} \end{aligned}\right\} \qquad (4.135)$$

并推导出

$$\hat{u} = \hat{\delta} + \hat{\alpha}(\tilde{x} - \tilde{y}) - \hat{\beta}\tilde{z} = u = \delta + \alpha(x-y) - \beta z \qquad (4.136)$$

由（4.133）并利用（4.125）便得到了平均值方程

$$\frac{dx}{d\tau} = -v\left\{x\exp(-u) - y\exp(u)\right\} + x(1-z) \qquad (4.137a)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = v\left\{x\exp(-u) - y\exp(u)\right\} + \left(\frac{y_0 - y}{y_0}\right)y \qquad (4.137b)$$

$$\frac{dz}{dt} = -a(1-x)z \qquad (4.137c)$$

方程（4.137）是下面进行分析的基点。

有无非线性迁移时捕食者—被捕食者模型的比较

迄今已经把奇点和它的稳定性联系起来了，现在用标准方法进行分析。显然，系统的奇点 $p_s(x_s, y_s, z_s)$ 是三个超越方程的解

$$0 = -v[x_s\exp(-u_s) - y_s\exp(u_s)] + x_s(1-z_s) \qquad (4.138a)$$

$$0 = v\left[x_s\exp(-u_s) - y_s\exp(u)\right] + \left(\frac{y_s - y_0}{y_0}\right)y_s \qquad (4,\ 138b)$$

$$0 = -a(1-x_s)z_s \qquad (4,\ 138c)$$

在奇点 $p_s(x_s, y, z_s)$ 附近，将运动方程（4.137）线性化得到

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} \tag{4.139}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} x(\tau) &= x_s+\xi(\tau)\\ y(\tau) &= y_s+\eta(\tau)\\ z(\tau) &= z_s+\zeta(\tau)\end{aligned}\right\} \tag{4.140}$$

在（4.139）中矩阵元定义为

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= 1-z_s+\nu(\alpha x_s-1)\exp(-u_s)\\
&\quad +\nu\alpha y_s\exp(u_s)\\
a_{12} &= -\{\nu\alpha x_s\exp(-u_s)\\
&\quad +\nu(\alpha y_s-1)\exp(u_s)\}\\
a_{13} &= -\{x_s+\nu\beta x_s\exp(-u_s)\\
&\quad +\nu\beta y_s\exp(u_s)\}\\
a_{21} &= -\{\nu(\alpha x_s-1)\exp\\
&\quad (-u_s)-\nu\alpha y_s\exp(u_s)\}\\
a_{22} &= \frac{y_0-y_s}{y_0}-\frac{y_s}{y_0}+\nu\alpha x_s\exp\\
&\quad (-u_s)+\nu(\alpha y_s-1)\exp(u_s)\\
a_{23} &= \nu\beta x_s\exp(-u_s)+\nu\beta y_s\exp(u_s)\\
a_{31} &= az_s\\
a_{32} &\simeq 0\\
a_{33} &= -a(1-x_s)
\end{aligned}\right\} \tag{4.141}$$

为进行（线性）稳定性分析，在求解（4.139）时令

$$\begin{pmatrix}\xi(\tau)\\ \eta(\tau)\\ \zeta(\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\\ \xi_0\end{pmatrix}\exp(\lambda\tau) \qquad (4.142)$$

其本征值λ必须满足久期方程

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad (4.143)$$

因此，只有所有的本征值满足 $\mathrm{Re}\{\lambda_j\}\leqslant 0(j=1,2,3)$ 的奇异点$P_S(x_sy_sz_s)$才是稳定的。

我们在下面分析三种特殊情况：

A）不考虑隐蔽环境ρ_0的迁移和饱和的纯Volterra—Lotka模型。

B）选择尽量简单但又是（4.138）的非简并解的趋向参数，同时包括隐蔽环境迁移和饱和的完整模型。

c）有ρ_0的迁移而无饱和的模型。

情况A），在纯Volterra—Lotka模型中必然要令$\nu=0$；这便得到零迁移概率，并且忽略了环境1对环境2的影响。只考虑环境1，由（4.138a，c）得出

了两个奇点：P_0（x=0，z=0）和P_1（x=1，z=1）。线性化方程（4.139）的本征值遵从方程（4.143），奇点P_0和P_1的本征值分别为

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1^{(0)}=1, \qquad \lambda_2^{(0)}=-a\\&\lambda_1^{(1)}=i\sqrt{a}, \quad \lambda_2^{(1)}=-i\sqrt{\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{4.144}$$

P_0是不稳定的，P_1是一个“中心”。在P_1中心附近的轨道是可以计算的，因为从精确的运动方程（4.137a，c）容易证明

$$[x(\tau)-\ln x(\tau)]+\frac{1}{a}[z(\tau)-\ln z(\tau)]=K \tag{4.145}$$

是常数，即左边是运动常数，从（4.145）确定了在x－z平面上的轨道形状。我们知道，中心就是奇点的临界情况，当在运动方程中加上小的扰动就会产生本质的变化。

情况B），现在讨论在隐蔽区中被捕食者的迁移和饱和的完整模型。

方程（4.138a－c）有一个平凡的奇点解P_0（0，0，0），由（4.137）得到的结果

$$\lambda_1=-a,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=1-2v\cosh(\delta)$$

说明P_0是不稳定的。

由（4.138c）推得非平凡解

$$\text{或}\quad \text{Ⅰ})\quad x_s=1 \qquad (4.146)$$
$$\text{或}\quad \text{Ⅱ})\quad z_s=0$$

在Ⅰ）时，从（4.138a,b）中消去迁移项便得

$$z_s=1+\left(\frac{y_0-y_s}{y_0}\right)y_s \qquad (4.147)$$

将它代入（4.138b）便得到y_s的超越方程

$$\left.\begin{aligned} &vy_s\exp\left[v(y_s)\right]=\left(\frac{y_0-y_s}{y_0}\right)y_s \\ &\qquad +v\exp\left[-v(y_s)\right] \\ &\text{而} \\ &v(y_s)=\delta+\alpha-\beta-\alpha y_s \\ &\qquad -\beta\left(\frac{y_0-y_s}{y_0}\right)y_s \end{aligned}\right\} \qquad (4.148)$$

我们也可以把（4.148）方程的两边作为y的函数用作图法求解。

在此，我们选择特殊的合理的趋向参数

$$\beta=\delta>0,\qquad y_0=1 \qquad (4.149)$$

而来展开对方程（4.138）的讨论。这组参数说明，在开放环境中被捕食者的恐惧参数β等于它的偏好参数δ，捕食者在此处是藏起来的！被捕食者在危险的环境1有较丰富的食物。

在选择参数为（4.149）时，方程（4.138）的

解特别简单

$$x_s = 1,\ y_s = 1,\ z_s = 1 \qquad (4.150)$$

它亦满足（4.138a－c），或者满足（4.138c，147，148）。我们可以讨论它的稳定性。假定久期方程（4.143）的形式为

$$P(\lambda) = C_0\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3 = 0 \qquad (4.151)$$

以及

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_1 &= 1 - 2r \\ C_2 &= a(1+s) - r \\ C_3 &= a(1-r+s) \end{aligned}\right\} \qquad (4.152)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} r &= \nu(2\alpha - 1) \\ s &= 2\nu\beta \end{aligned}\right\}$$

奇点（4.150）的渐近稳定性的充要条件是要求（4.151）的所有解具有负实部。如果Hurwitz判据

$$\left.\begin{aligned} &a)\quad \frac{C_n}{C_0} > 0 \qquad \text{当} n = 1,\ 2,\ 3 \\ &b)\quad H_1 = C_1 > 0 \\ &\qquad H_2 = C_1C_2 - C_0C_3 > 0 \\ &\qquad H_3 = C_3H_2 > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.153)$$

成立，则该条件就被满足。经过对（4.153）的分析得出渐近稳定性的简单条件是：

$$\alpha<\frac{1}{2} \qquad (4.154)$$

当聚居的趋向值α较小时，$\mathcal{P}_b$建立了一种平衡状态。被捕食者从隐蔽区稳定地流向开放环境，使被捕食者在两个环境中有稳定的数目，在开放区依靠被捕食者生活的捕食者也具有了稳定数目。

但是，当聚居趋向值α较大时，被捕食者由隐蔽环境2（它们在环境2恢复原数后向开放环境运动）向开放环境1成群地周期地进行迁移，由此引起了开放环境捕食者群体$\mathcal{P}_b$的周期变化。

在（4.146）中的Ⅱ）也是一种重要情况：当$z_s=0$时，仍然可以消去（4.138a,b）中的迁移项，从而得到：

$$x_s=-\frac{(y_0-y_s)}{y_0}y_s \qquad (4.155)$$

为了得到y_s的超越方程，将上式代入（4.138b）得

$$\left(\frac{y_0-y_s}{y_0}\right)\exp\left[-\omega(y_s)\right]+\exp\left[\omega(y_s)\right]$$

$$=\frac{1}{\nu}\left(\frac{y_0-y_s}{y_0}\right)$$

和

$$\omega(y_s)=\delta-\alpha y_s\left(1+\frac{y_0-y_s}{y_0}\right)\int \quad (4.156)$$

由稳定性分析表明，（4.155）和（4.156）有一个稳定点$z_s=0$。

捕食者群体$\mathcal{P}_\beta$灭绝的原因是由于被捕食者不喜欢开放环境1（$\delta=0$），它们大量的迁入隐蔽环境2，以致达到$y_s>y_0$。被捕食者数目的大量减少，引起了开放环境1中捕食者的有效死亡率一直保持正值。“有效”是指考虑到出生和死亡两种因素时的数目减少率。

情况C），研究被捕食者从隐蔽环境2向开放环境1有迁移，但在隐蔽环境中没有饱和现象的模型。在上面所讨论的完整模型中，令$y_1\to\infty$时取极限，并用方程（4.137）和（4.138）进行化简便得到这种模型。

取$x_s=1$，通过极限修正方程（4.147）和（4.148）便得：

$$z_s=1+y_s, \quad (4.157)$$

$$\nu y_s\exp(\delta+\alpha-\beta-(\alpha+\beta)y_s)$$
$$=y_s+\nu c\exp(-\delta-\alpha+\beta+(\alpha+\beta)y_s) \quad (4.158)$$

其解$z_s = 0$表示捕食者群体灭绝的情况，因此只能发生在$x_s = y_s = z_s = 0$的情况下。

也可能出现两种群体无限增长（群体爆炸）的情况，这是由于在隐蔽环境中的被捕食者没有饱和限制，同时它们又偏好开放环境1的缘故。

另一种解表明，虽然在隐蔽环境中的被捕食者没有饱和出生的问题，但被捕食者却出现阻尼振荡而最终趋于稳定值的状态。这是由于捕食者使环境1中的被捕食者数目减少，引起了被捕食者对环境1的抗聚居倾向和强偏好的结合产物。

还有一种解表明，尽管没有饱和生存问题，然而被捕食者却缓慢地趋向一个稳定值。这是由于在开放环境的被捕食者对捕食者缺乏恐惧心理以及对开放环境1的偏好造成的。

从以上几种解的情况说明，在物种演化进程中的幸存者，可以通过种种方式而得到幸存。

第五章

关于投资的非平衡理论

经济学是一门较早地应用了定量、半定量方法来讨论经济现象的社会科学，并已经得到了不少有益的结论。因此，我们研究定量社会学对经济问题的应用，对本书所提出的概念和方法是个极好的检验；同时，经济问题是人们最关心的社会实际问题，从理论上予以讨论也有着巨大的现实意义。

5-1 引 论

首先我们讨论本章所采用的概念与前面几章中一般概念之间的关系。

在定量的斯霍姆彼得（Schumpeter）商品循环理论中，一个主要的概念是以不同投资决策形成不

同投资集团为特征的投资者的分布构形，我们将在本章§2引入这一概念。在那里可以看到，它只是前面用一般方法引入概念的一个具体实例：投资者构形相应于第二章社会舆论问题讨论的社会构形，在运动方程上它们也有着密切的联系。然而，社会舆论问题同这里经济问题还是有着很多的不同：

i）从问题的实质上来看，前面是讨论政治舆论，这里是研究经济中投资的性质。

ii）从它们分布所反映的关系上看，前者反映所有人的态度，人数众多，误差较小。这里反映的仅是社会上一小部分人——不同决策企业家的分布情况。

iii）采用不同的经济决策，各种类型投资量的大小就不同，即投资者的构形是与物质变量（投资多少）密切相关的，这点从后面投资结构指数的定义可以看出来。

iv）第二章中出现的参数可根据不同的情况，人为地给出，这里的偏好参量（影响投资决策）是作为服从一定方程的动力学变量来处理的，实质上，相当于考虑到投资量的不同对投资偏好参数的反馈作用。第三章原则上讨论了趋向参数与社会构形变量耦合的一般动力学问题，这里给出这类较复

杂问题的第一个实例。

本章的经济投资问题主要讨论的是战略投资。什么是我们讨论的战略投资呢？

在某些西方国家，国家或私人的经济研究机关主要收集关于固定资本投资量（包括各种设备的投资），固定资产存货（指完成或未完成的产品），投资消费等资料。通常又把投资分成诱导投资和主动投资两种。诱导投资可以看成是由于科学技术上的进步，某种政治条件的改变，由生产本身激发出的投资；而主动投资则完全是由企业家本人思想决定的投资，它受投资者个人的偏好、灵活性所决定。在我们的模型中所采用的战略投资大体上与主动投资相当。后面将会看到，采用战略投资的提法更广泛一些。

5-2 模型的建立

首先我们讨论投资者对战略投资的选择。在任何给定时刻，一个投资者（可以是国家，也可以是企业、集团或个人）可以选择各种不同的投资方案。为了简单，我们假定在投资者可选择的集合中

仅有两个可供选择的类型。一个是合理型投资，用R(t)表示；一个是发展型投资，用E(t)表示。所谓R(t)是指为了维持原有产品的生产而必须进行的投资，象设备的维修，原料的购买，生产者的工资等；而E(t)则指扩大生产所需进行的投资，如设备改造，新建厂房与设备，人员培训等。在一般情况下，这两者有一固定的比例，称为各自的平均值，记为$R_0(t)$、$E_0(t)$。由于外界市场等方面因素的影响，投资者的发展性投资与合理性投资的比例经常会发生改变。我们感兴趣的正是这些改变值，随时把握这些变化，找出这些变化的规律，根据各种因素的关系，预测投资的改变，及时调整企业，使之获得更大的经济效益，这是我们讨论这类经济投资问题的目的。

假定我们总投资额I(t)为常量（我们只关心投资比例的改变）。可有

$$I(t) = E(t) + R(t) \qquad (5.1)$$

而E(t)，R(t)分别可写为

$$E(t) = E_0(t) + B(t)$$

$$R(t) = R_0(t) - B(t) \qquad (5.2)$$

其中B(t)是围绕平均值的涨落，其值可正可负，它的变化范围是

$$-E_0 < B(t) < R_0 \qquad (5.3)$$

与前几章类似，我们定义投资结构指数，用以反映投资中的比例关系。

$$Z(t) = \frac{E(t) - R(t)}{E(t) + R(t)} = \frac{E(t) - R(t)}{I} \qquad (5.4)$$

同样可将Z(t)分成平均值部分和涨落部分

$$Z(t) = Z_0 + z(t) = \frac{E_0 - R_0}{I} + \frac{2B(t)}{I} \qquad (5.5)$$

z(t)是我们研究的主要变量。

投资者构形

原则上一个工业企业可以计划或者实行任意多个投资方案，但由于我们假定了投资者作为决策单位，这就相当于假定了每个企业只有一个投资方案。投资的方案总数为2N，$2N \gg 1$。为了简单还假定所有投资方案具有一样的投资量，这个假定并不影响讨论问题的实质。

一个假想的“中立的”投资者，他的投资性质相应于大量具体投资者性质的平均值。他的一个方案的投资量为$i = I/2N$。我们看到i也由合理型投资

r_0和发展型投资e_0两部分组成：

$$i = \frac{I}{2N} = e_0 + r_0$$

并且　　$e_0 = E_0/2N$,　　$r_0 = R_0/2N$　　（5.6）

实际投资者的性质与假想的“中立的”投资者的性质不一样，E-型投资者喜欢发展型投资，其发展型投资e_E必然大于平均数e_0；而合理型投资r_E则低于平均数r_0，这样投资量可以写为

$$i = e_E + r_E,\ e_E = e_0 + b,\ r_E = r_0 - b, b > 0 \quad (5.7)$$

显然，b是发展型投资超过平均数的大小。

另一方面R-型投资者喜欢合理性投资。同样分析，也可得到R-型投资者投资方案的投资量。

$$i = e_R + r_R, e_R = e_0 - b, r_R = r_0 + b' b > 0 \quad (5.8)$$

b是合理型投资超过平均数的大小。为简单，将两式中的b取为同一值。

我们再假定在给定地点和时刻E-型投资者人数$n_E(t)$和R-型投资者人数$n_R(t)$之和也是2N。

即假定　　$n_E(t) + n_R(t) = 2N$　　(5.9)

给定时刻t，数组｛E(t)，R(t)｝表示对应于一定投资数量的投资结构；而数据｛$n_E(t), n_R(t)$｝表示对应于一定投资者人数的战略投资的变化，我们把它定义为投资者构形。

我们定义 $$n(t)=\frac{n_E(t)-n_R(t)}{2} \qquad (5.10)$$

这样n的增加或减少就可以反映投资者的构形 如下变化 $\{n_E\ n_R\}\to\{n_E+1,\ n_R-1\}$

或 $\{n_E\ n_R\}\to\{n_E-1,\ n_R+1\}$

即一个R-型投资者转变为E-型投资者，或者相反。

同样在投资者中同时有d个投资者改变类 型，我们可用 $n\to n+d$，$n\to n-d$ 来表示。

为了计算上的方便，我们用归一化变量—投资者构形指数

$$x(t)=\frac{n(t)}{N} \qquad -1\leqslant x(t)\leqslant 1 \qquad (5.11)$$

代替n。

利用初等数学就可以证明投资者构形指数x(t)与投资量中的投资结构指数z(t)有如下关系

$$z(t)=\frac{4Nb}{I}x(t) \qquad (5.12)$$

我们知道了投资者构形就可以很方便地求出投资额的结构。这样，可以把一个投资金额的问题转化为我们已经讨论过的不同种类人员个数的问题。

投资者构形的运动方程

我们用工业投资者的不同投资决策的动力学方

程来讨论一段时期内工业投资的周期。不同的投资决策是由不同类型企业家的数目分布来决定的。用发展型投资的投资者与合理型投资的投资者之数目$n_E(t)$和$n_R(t)$来表示在实际社会中经济的发展情况；投资者构形$\{n_E(t), n_R(t)\}$的改变导致了工业投资的比例和投资方向的改变，这点是由$x(t)$的改变引起工业投资结构指数$z(t)$改变所表示的。同时这些改变又会带来投资者对 E-型投资和 R-型投资趋向的改变，从市场学的观点来看，机会和其它投资者的行动也是投资趋向改变的条件。这样一来，工业经济的变化可以用有关投资性质的两个分量所遵从的方程来描写，即通过投资者构形的运动方程和投资者投资偏好的运动方程来描写。

上节我们已经给出了从一种投资者构形$\{n_E, n_R\}$到另一种构形的转变，它可以是一个投资者投资趋向的转变，也可以是多个投资者的同时转变。这两种转变过程都是经常讨论的。

投资者构形的决定性描述并不是必要的，因为所有投资都带有一定的冒险性，而采用随机理论是比较恰当的。我们不直接描写投资者的构形$\{n_R(t), n_E(t)\}$，而是采用投资者构形的概率分布$P[n_E, n_R; t]\equiv P(n; t)$来表示投资者构

形。$P(n;\ t)$表示在时刻t，投资者构形为$\{n_E,\ n_R\}$（其中$(n_E-n_R)/2=n$）的概率，显然这样的概率分布满足归一化条件

$$\sum_{n=-N}^{N}P(n;\ t)=1 \qquad (5.13)$$

投资者构形的转变是通过投资者投资趋向的改变来实现的。首先，我们把一个投资者投资趋向的改变定义为：

$$P_{E\leftarrow R}[n_E,\ n_R]\equiv P\uparrow(n) \qquad (5.14)$$

$$P_{R\leftarrow E}[n_E,\ n_R]\equiv P\downarrow(n) \qquad (5.14')$$

(5.14)表示单位时间内投资者构形$\{n_E,\ n_R\}$中的一个R-型投资者转变为E-型投资者的概率，(5.14′)表示单位时间内投资者构形$\{n_E,\ n_R\}$中的一个E-型投资者转变为R-型投资者的概率。投资者构形改变为$\{n_E,\ n_R\}\rightarrow\{n_E+1,\ n_R-1\}$，这个转移概率应等于单个投资者的转移概率$P\uparrow(n)$乘上可转移的投资者的数目。即

$$W\uparrow(n)=n_RP\uparrow(n)=(N-n)P\uparrow(n) \qquad (5.15)$$

同样投资者构形改变$\{n_E,n_R\}\rightarrow\{n_E-1,n_R+1\}$的转移概率$W\downarrow(n)$也等于可转移投资者的数目乘上单个投资者从E-型向R-型转变的转移概率

即 $W\downarrow(n)=n_E P\downarrow(n)=(N+n)P\downarrow(n)$ (5.15′)

$P(n;t)$的运动方程就是概率论的主方程，它可以由一般概率统计的方法来建立，具体写为：

$$\frac{dP(n;t)}{dt}=[W\uparrow(n-1)P(n-1;t)+W\downarrow(n+1)P(n+1;t)]-[W\uparrow(n)P(n;t)+W\downarrow(n)P(n;t)] \quad (5.16)$$

上式右边第一项描写单位时间流向构形n的概率流，第二项描写单位时间从构形n流出的概率流。该方程是在投资者构形中每次只能改变一个人，并忽略了多步转移的假定下得到的。

按照概率定义，平均值$\langle n\rangle=\sum_{n=-N}^{N}nP(n;t)$在一定近似条件下满足方程

$$\frac{d\langle n\rangle}{dt}=\sum_{n=-N}^{N}n\frac{dP(n;t)}{dt}=\sum_{n=-N}^{N}[W\uparrow(n)-W\downarrow(n)]P(n;t)=\langle W\uparrow(n)-W\downarrow(n)\rangle$$
$$=W\uparrow(\langle n\rangle)-W\downarrow(\langle n\rangle) \quad (5.17)$$

根据(5.11)式的定义可把平均值$\langle n\rangle$的运动方程化为平均值$\langle x\rangle$的方程：

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt}=K(\langle x\rangle) \quad (5.18)$$

其中驱动力K(〈x〉)的具体形式是

$$K(\langle x\rangle)=\frac{1}{N}\left[W\uparrow(\langle n\rangle)-W\downarrow(\langle n\rangle)\right]$$
$$=(1-\langle x\rangle)P\uparrow(N\langle x\rangle)-(1+\langle x\rangle)P\downarrow(N\langle x\rangle) \qquad (5.19)$$

进一步可把方程(5.18)简化为

$$\frac{dx(t)}{dt}=K(x(t)) \qquad (5.20)$$

投资者构形分布的参量

当我们知道了方程(5.20)中驱动力K的具体形式时，就可以按照通常的数学方法来求解投资者分布，从而了解到投资构成的特点。从(5.19)可知驱动力不仅依赖在时刻t系统中投资者分布x(t)，而且也依赖在时刻t分布的个体转移概率P↑(x)，P↓(x)。我们认为转移概率的大小由称为“互变因子”δ和“协调因子”k两个因子决定。

参量δ表示投资者对发展型投资或合理型投资的偏好。δ>0表明偏好E-型投资，δ<0表明偏好R-型投资。同时，这种偏好还会随着时间发生变化，后面给出δ(t)满足的方程。

参量k表示在给定环境下投资者的转移强度，

换句话说，它反映了一个投资者追随其它投资者变化的快慢。参量k给出了投资者采取同一趋向的量值。

按照（5.19）式，我们自然会将驱动力K写成参量δ，k的函数：

$$K(x;\delta,k)=(1-x)P_{\uparrow}(x;\delta k)-(1+x)P_{\downarrow}(x;\delta,k) \qquad (5.21)$$

根据对参量性质的分析，我们采用前面的指数形式

$$\begin{cases} P_{\uparrow}(x;\delta,k)=\nu\exp(\delta+kx) \\ P_{\downarrow}(x;\delta,k)=\nu\exp[-(\delta+kx)] \end{cases} \qquad (5.22)$$

其中ν是标度因子，它因单位选取的不同而取不同的值。从（5.22）可知δ>0对P↑的贡献大于1，对P↓的贡献小于1，这相应于容易向E-型投资者转移；反之δ<0，则容易向R-型投资者转移，这符合前面对参量δ的要求。k值大时，若x>0（投资者中多数为E-型投资者），则增强了向E-型投资者的转移；若x<0（投资者中多数为R-型投资者），则不利于向E-型投资者转移。同样可以分析其它情况。

为了具体分析投资者的构成，把驱动力K作为某个势函数V(x;δ,k)的负梯度，采取经典物理学经常用的方法。

$$K(x;\ \delta,\ k) = -\frac{\partial V(x;\ \delta,\ k)}{\partial x} \qquad (5.23)$$

其中 $$V = \frac{2\nu}{k^2}\left[kx\sinh(\delta + kx)\right.$$

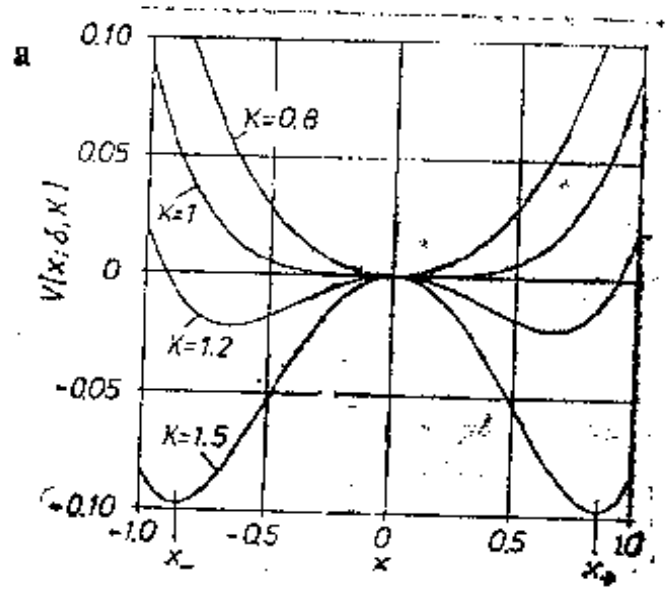
$$\left. -(1+k)\cosh(\delta + kx)\right] \qquad (5.24)$$

在$\delta = 0$时，取不同k值，以及在$k = 1.5$时，取不同δ值，这样分别画出势函数$V(x;\ \delta,\ k)$的分布曲线，如图5.1所示。

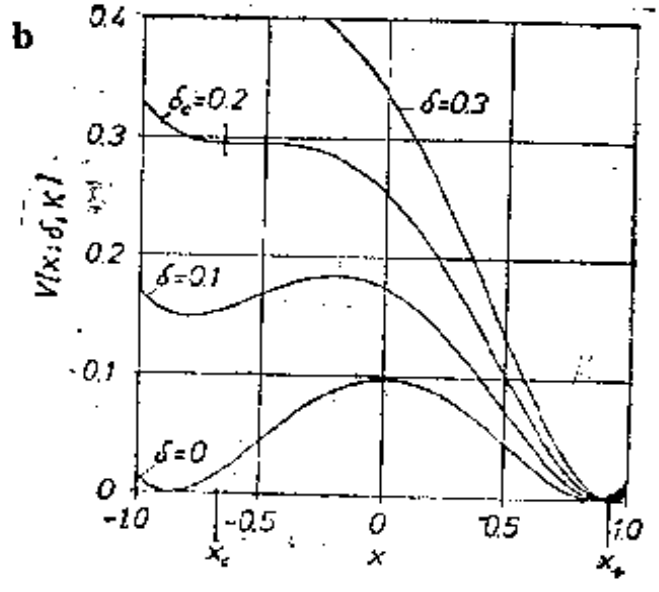
从势函数曲线看出，不论x从何值开始，最终总要趋于一种确定的状态，即有确定的投资者人数（当然由于x的初值不同，对于$\delta = 0$的对称势分布，或者处于x_+的状态，或者处于x_-的状态）。这与在经济投资问题中投资比例通常出现周期性变化的实际是不相符的。其原因在于某一类型的投资者多了，必然要影响到每个投资者的偏好，参量δ不应是常量，而是时间的函数。

下面我们具体分析$\delta(t)$应满足的方程，然后通过求解δ和x的耦合方程讨论经济投资的具体问题。

$\delta(t)$应满足什么样的运动方程呢？一般认为两类投资者一样多时（$x = 0$），$\delta(t)$最终应朝着没有任何偏好的方向变化，即$\delta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$。同时当$x < 0$，即合理型投资者较多时，$\delta(t)$应趋向于发展



a) $\delta = 0$



b) $k = 1.5$

图5.1 不同参数值的势函数曲线

型投资，$\delta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \delta_0$，反之$x<0$，发展型投资者较多时，应趋向合理型投资$\delta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\delta_0$。据此可写出 $\delta(t)$的方程

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \mu\ [\delta_0 - \delta(t)]\ \exp\ [-\beta x(t)]$$

$$-\mu\ [\delta_0 - \delta(t)]\ \exp\ [\beta x(t)] \qquad (5.25)$$

其中$\mu>0$，$\beta>0$，$\delta_0>0$，

δ_0称为战略决策幅度，可以看成互变因子δ的容许值，它的大小随单位不同而不同；β仍是趋向反转的速度参数，它反映δ随x变化的快慢；μ称为战略灵活性参数，描写投资者从一种投资转到另一种投资的灵活程度。经过简单的变换，我们可以得到一个与x的变化相类似的运动方程

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = L(x;\ \delta,\ k) \qquad (5.26)$$

战略偏好驱动力$L(x;\ \delta,\ k)$的具体形式是

$$L(x;\ \delta,\ k) = -2\mu\{\delta_0 \sinh[\beta x(t)] +$$

$$[\delta(t)-\delta_1]\cosh[\beta x(t)]\} \qquad (5.27)$$

其中δ_1表示整体对发展型投资的偏好。

5-3 运动方程的分析

稳定性分析

方程（5.20），（5.26）构成了描写投资者构成的耦合方程组。由于方程组是非线性的，我们无法精确求解。根据实际需要，我们可以先研究它的定态解，对方程组进行稳定性分析。很容易求得方程（5.20），（5.26）的定态解，从定态解看出，当k取值由小变大时，定态解的数目会从一个、三个变到五个，其中三个定态解对应临界情况k_c。当$k<k_c$时，仅有一个定态解，即$(x,\delta)=(0,0)^*$ $k=k_c$时，有三个定态解，$k>k_c$时，有五个定态解。这三种参数条件下都有（0，0）解，我们讨论（0，0）解（无偏好，两种投资者人数相等）的稳定性问题。通过线性稳定性分析，可以得出，当

$$k-1-\gamma<0 \quad 或 \quad k<1+\gamma \tag{5.28}$$

时，（0,0)解是稳定的焦点；当

$$k-1-\gamma>0 \quad 或 \quad k>1+\gamma$$

时，（0，0）解是不稳定的焦点。（其中$\gamma=\mu/\nu$，是

两个“力”的标度因子之比）

可以这样理解上面的结果：当适应性不强时k较小，各个投资者独立进行投资，又没有偏好，则平均来看各种投资者数目一样多，当适应较强，k大于某个值，即使没有偏好也会由于涨落作用，使投资者分佈不能稳定在各半的水平上。进一步利用数学上的Poincaré—Bendixon 理论可证明，在不稳定时，即使k还不十分大，就可出现极限环，投资者人数随时间呈周期性的变化。这与利用计算机进行数值计算得到同样的结果。

数值分析

为了得到更直观的图象，我们分别给定一些参数值，利用计算机求解，并把解画出图来，分析投资者构成的变化特点。这里我们仅分析三组典型参数的情况。在计算前我们引入标度时间$\tau = 2\nu t$，使方程形式简单。

1） $k=1.0$，$\delta_0=0.5$，$\delta_1=0$，$\beta=4.0$，$\gamma=0.5$，取初值$\delta(0)=-1.0$，$x(0)=-1.0$时，计算机计算结果表示在图5.2中。

从图上可以看出，$x(\tau)$和$\delta(\tau)$经过几次不稳定的振荡而趋向$x=0,\delta=0$的稳定值。这里参数$k=1.0,\gamma=0.5$，符合稳定性分析$k<1+\gamma$的条件，

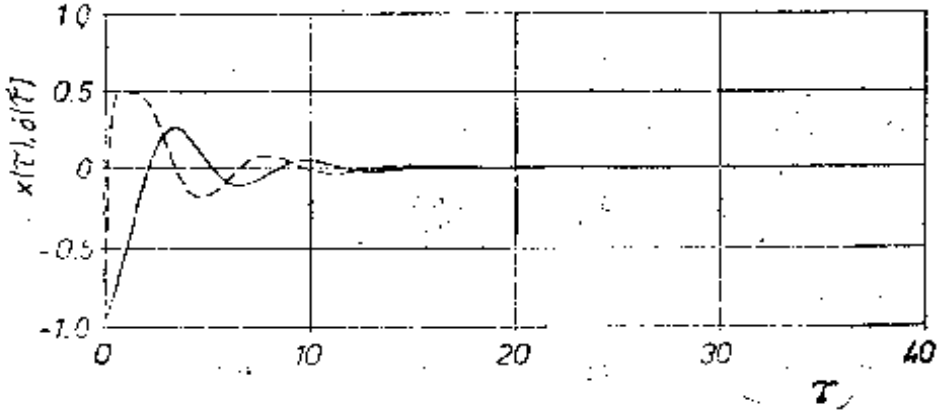


图5.2 在1）的参数值下，x(τ)——，
δ(τ)…… 的时间关系曲线

解（0，0）是稳定的。

2） $k=1.6$，$\delta_0=0.5$，$\delta_1=0$，$\beta=4.0$，$\gamma=0.5$ 取初值$\delta(0)=0.25$，$x(0)=-0.25$时，计算机计算结果表示在图5.3中，图中曲线表明x(τ)与δ(τ)都呈周期振荡，这与稳定性分析 $k>1+\gamma$是一致的，说明系统的（x，δ）=（0，0）解是不稳

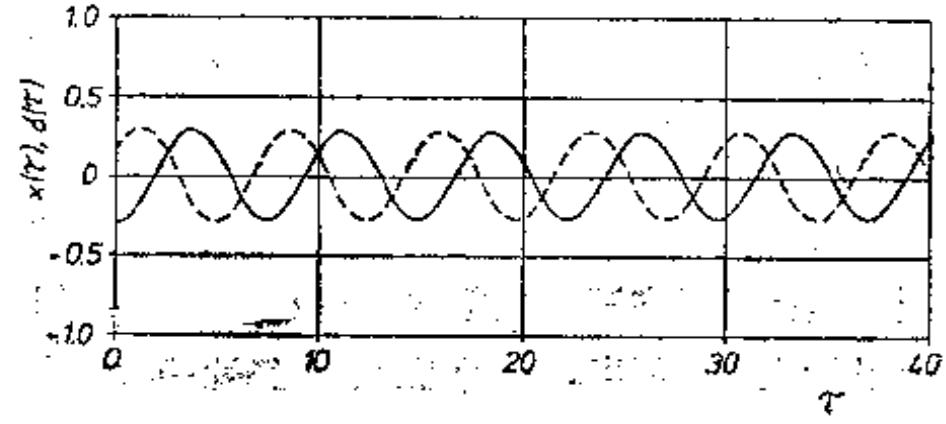


图5.3 在2）的参数值下，x(τ)——，
δ(τ)……的时间关系曲线

定的。而可能出现怎样的稳定解呢？这需要作进一步的数学计算。从图上我们可以看到，它相当于在$x=\delta$平面上的极限环，并且随时间作周期振荡的$\delta(\tau)$的位相超前于$x(\tau)$的位相，对此可以理解为投资者偏好的改变引起了投资构成的变化，深入的计算机计算还表明，随着k的增大，振荡解的振幅也将变大。图中$x(\tau)$与$\delta(\tau)$的周期一样，是由于进行了适当的标度变换。

3） $k=2.0$，$\delta_0=0.5$，$\delta_1=0$，$\beta=4.0$，$\gamma=0.5$，取初值$\delta(0)=0_-$，$x(0)=0_+$（初始在稍微偏离零点的状态上）时，计算机计算结果表示在图5.4

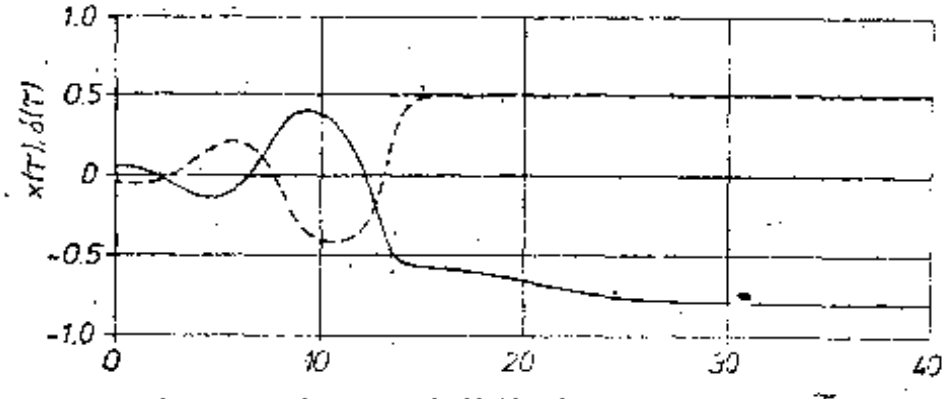


图5.4 在3）的参数值下$x(\tau)$——，$\delta(\tau)$……的时间关系曲线

中。这样的初始条件表示系统虽处在(0, 0)状态上，但还有涨落存在。计算结果表明不但原来的(0, 0)解不稳定，周期振荡解也是不稳定的，在经过了一段不规则的振荡后，系统趋于一个不为零的定态上

$(x, \delta) \approx (-0.8, 0.5)$。此定态表明投资者虽然有对发展型投资的偏好，但在所有投资者中合理型投资者却占稳定的多数，似乎这与一般的想象有些矛盾。实际上这是由于投资者构形反作用于偏好参数所造成的。

5-4 联邦德国经济的实际考查

从上面的分析中我们看到，选取不同参数值，反映了不同的经济发展类型；如存在某一稳定的投资比例，或投资比例发生周期性的变化等等。然而在实际生活中情况是十分复杂的，一方面，在不同的经济发展时期，一个国家要采取不同的经济政策（选取不同的参数值）；另一方面，由于各国的经济模式不同，甚至上面的模型对某些国家根本不适用。当然，由于一些国家经济统计部门对数据的收集、统计方法不同，也会造成模型不适用。因此，我们并不要求这个模型适合所有国家的经济发展，例如用这个模型去分析美国经济就不适用，美国经济统计数字中把投资中合理型部分与企业的战术投资合并在一起，无法讨论清楚。我们只希望能够借

助于模型的帮助，了解定量经济分析的方法，分析某些经济发展情况不同的原因。

联邦德国经济的实际发展

用上述理论可以较好地解释德意志联邦共和国从1955年到1980年二十五年经济发展的情况。从经济政策和管理规定上来看，德国的经济基本上可以分为两个时期。由于经济发展的连继性和第一个时期的影响，可以把第二个时期的前几年单独作为一个时期，这样大体上可以分为1955—1965，1967—1971，1973—1980三个时期，具体经济发展数字如下。

表5.1 联邦德国1956—1978年投资额

年	R-型投资量 〔10^9德国马克〕	E-型投资量 〔10^9德国马克〕	$Z=\frac{E-R}{E+R}$
1956	16.4	11.4	−0.183
1957	15.9	10.8	−0.197
1958	16.6	8.2	−0.342
1959	17.7	10.2	−0.274
1960	22.2	12.6	−0.282
1961	24.2	13.6	−0.282
1962	24.2	11.2	−0.369

1963	22.4	10.6	−0.360
1964	23.5	11.2	−0.360
1965	26.1	13.0	−0.342
1966	25.9	11.6	−0.388
1967	23.0	7.2	−0.527
1968	22.3	10.4	−0.369
1969	30.0	21.6	−0.162
1970	34.9	23.2	−0.205
1971	34.4	18.6	−0.298
1972	31.3	12.4	−0.439
1973	30.5	13.8	−0.379
1974	28.5	10.2	−0.471
1975	25.9	6.2	−0.626
1976	28.5	6.8	−0.626
1977	27.5	6.6	−0.613
1978	28.9	7.0	−0.613

根据我们提出的模型，分析三个时期的投资构成数据，分别定出各个参数的不同取值。

表5.2　联邦德国经济发展的模拟参数

时　期	γ	β	δ_0	δ_1	g	k	v
1955—1965	0.13	10	0.5	−0.3	0.2	1.5	0.145
1967—1971	0.13	10	0.5	0.3	0.5	1.5	0.225
1973—1980	0.13	10	0.5	−0.3	0.7	0.7	0.409

不同参数值的具体分析

在我们选取的参数值中，有一些在联邦德国三个经济发展时期中是不变的，如互变因子 δ 容许变化的极值 δ_0，δ 趋向反转的速度 β 以及反映 δ 变化和 x 变化速度之比的标度战略灵活性 参 数 $\gamma=\mu/\nu$ 等。这些参数基本上由国家的经济体制决定。其余参数在三个不同时期取不同值。在三个时期中 g 从0.2，0.5到0.7逐渐增大，说明了通货膨胀引起了实际购买力的不断下降。协调参数 k 和投资偏好参 数 δ_1 的变化与经济发展的不同时期所采取的不同政策有密切的关系。

第二次世界大战刚刚结束不久，德国的所有工业部门都进行了设备更新和技术改造，不论在革新速度的快慢上，还是在革新方向的一致性上各部门都基本一致，并且也符合国家整体利益；在1960年以后，世界经济有所发展，联邦德国工业部门的革新过程，以互相有联系的工业在一起同步进行为特征，这反映在经济发展第二阶段上，虽然整体的协调性受到影响，但在有联系的一个系统内部的工业部门之间（如冶金系统内）的协调仍然是很好的，

我们对这两个时期都选择了较高的协调参量k的值，取k＝1.5。在1970年以后，实际上所有工业部门都开始独立地进行技术革新和技术改造，这种各部门的“独立工作”，很难再在全国范围内取得协调，即使在一个系统内也不容易。因此我们选取k＝0.7，为原来协调参数的一半。

同样可以分析投资偏好δ_1的取值。第一阶段是经济恢复时期，投资的主要任务是修复设备、维持正常生产，这时选取$\delta_1=-0.3<0$，体现了偏好合理型投资；第二阶段经济大发展时期，投资的主要任务是开发性生产，选取$\delta_1=0.3>0$，体现了此时偏好发展型投资；经济发展的普遍特点表现在波浪式的前进，在经济大发展后，要进行巩固和调正，选取$\delta_1=-0.3<0$，体现这时期合理型投资是主要的任务。上面对参数选取的分析，原则上与一般的投资规律相符，同时也与德国的实际情况一致。

联邦德国投资曲线的解释

把上述参数代入$\pi(\tau)$和$\delta(\tau)$的耦合方程组（5.20，5.26），通过计算机求解，可画出投资结构指数$z(\tau)$和互变因子$\delta(\tau)$的时间关系曲线

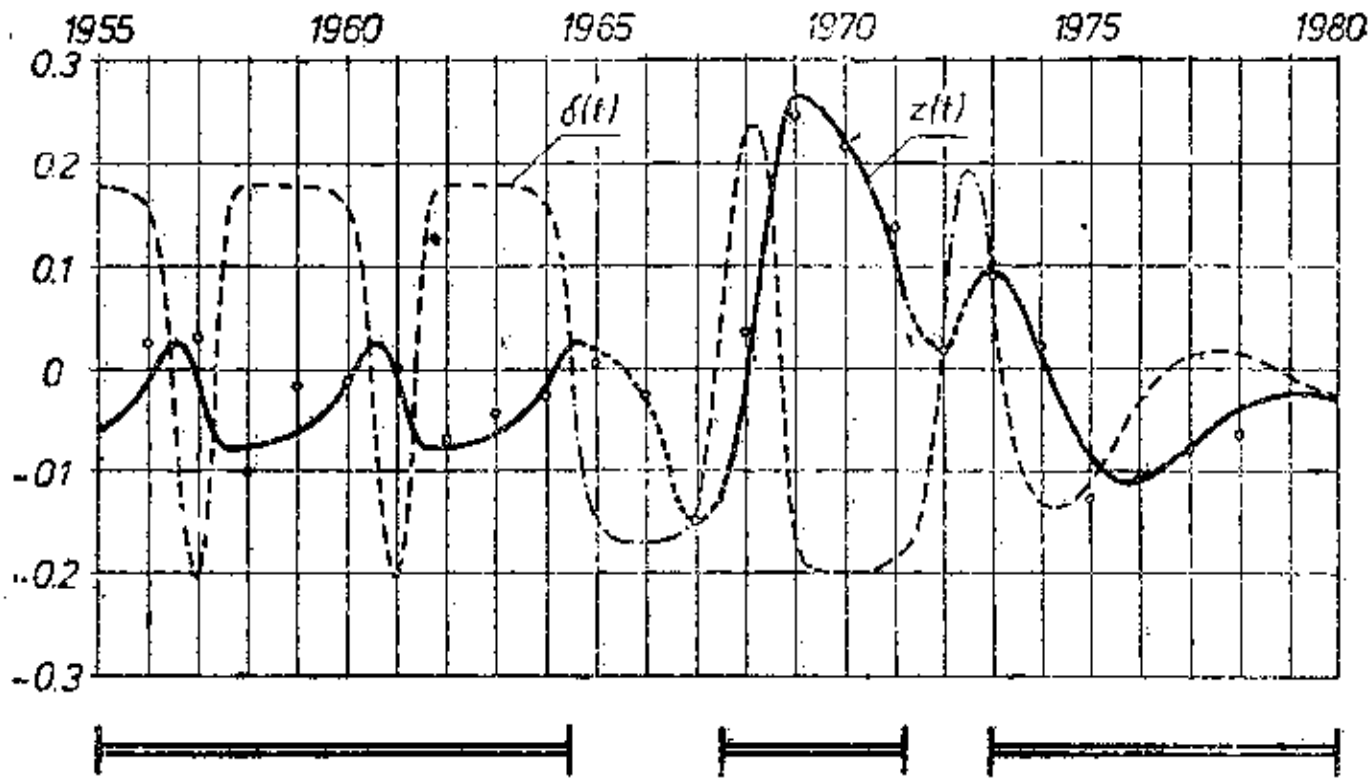


图5.5 在所给参数下得到的投资结构指数 z（t）——，互变因子δ（t）……随时间变化的径迹和德国经济实际结果的比较。 德国实际的经济投资量以0表示

（见图5.5）。

从图上可以很清楚地看到，给出的模型与联邦德国的实际数据符合得很好。

从图上还可以看出，从五十年代中期到六十年代中期，联邦德国经济的发展与理论上存在的极限环是一致的。二次大战以后，联邦德国的大批工厂和基础设施需要重建，又加上国际上工业的高速度发展，也使德国工业发展很快。而在投资方面某种强烈的开拓趋向致使投资结构指数z（t）的周期运动发生明显的非正弦畸变。工业投资者在相对较短时期的发展型投资以后，又很快改变到合理型投资，而在较长时期的合理型投资过程中相当缓慢地向着发展型投资方向变化。这反映经济实力的不足，虽有心发展，但经常保持的状态还是合理型、恢复型的投资。这个时期的合理型投资壮大了经济实力，为新的即将到来的“经济跃进”打下了基础。在这个时期互变因子δ（t）虽然也在发展型投资与合理型投资之间变动，但大部分时间停在发展型投资上，仅有很短的时间停在合理型的模式上。

在第二个时期δ（t）大部分时间停留在合理型投资的位置上，这中间δ（t）有一个向发展型投资上的突变，它促使结构指数z(t）也出现了一个向发

展型投资上的突变。图上反映出实际投资额的改变比投资偏好的改变落后一定位相，这可由偏好引起投资方向的改变来解释。六十年代后期联邦德国政府建立了紧密联合体，采取开拓型的政治主张，经济上采纳了以凯因斯（Keyne Sian）经济学理论为基础的席勒（Schiller）的主张，这些政策可从图上在1969——1970年投资上的明显峰值来反映。席勒的政策相当一个较高的δ_1参数，在席勒以后，即开始第三个时期，这时不得不再次调整δ_1为负值，以便把经济调整到一个较为稳定的周期上。

一些经济学家认为1970年前后，过分经济繁荣后，发展型的向外投资可能更适合由石油冲突引起的经济水平下降。但在1971年以后观察某一种参数下的数据，并以此来分析投资结构指数的运动是不可能了，因为这时经济现象日趋复杂。针对第三个时期经济变化迅速的一个特点，我们选择大的加速参数v。取$v=0.400$，是第一时期的三倍，这样得到的结果也基本与实际相符。

从联邦德国经济投资比例变化的例子中我们得到几点认识：

首先，我们看到定量社会学给出的模型虽不能

事前确定投资结构指数的大小，但在适当选定参数后，大体上可以得到与实际相符的结果，基本上达到了我们用来了解经济发展特点的目的。

其次，我们不仅可以从所得结果看到经济发展的趋势和特点，而且根据参数值的大小及所代表的物理内容，结合实际分析经济发展的原因，可以找出其中的规律。

第三，我们对经济问题采用了和舆论形成、人口迁移与生灭过程一样的理论，把它们纳入到统一的定量社会学的框架里进行讨论，并且得到了经济学的一般结论。这告诉我们，在这些不同的社会现象之间存在着某种相似性，抽出其中带共性的东西来，这将有助于经济学的进一步发展。

第六章

战争与和平问题

全世界共有一百多个国家，各个国家之间经济发展不平衡，政治态度不一样，社会制度也各异，然而人们除了关心本国经济发展以外，还要关心经济发展的环境和条件，也就是世界上的战争与和平问题。当前各种国际会议，各国领导人的互访，以及由各自利益出发形成的各个集团，如北大西洋公约组织，华沙条约组织，东盟组织，非洲统一组织，阿拉伯联盟等，无一不是为了协调在经济上、政治上、军事上的统一态度。可以说整个世界处在一种不停的竞争和发展之中。在几千年的人类有文字记载的历史中，有数不清的战争：有奴隶反抗奴隶主的斯巴达克起义，有为了宗教信仰而进行的十字军东征。在近代历史上战争更是接连不断：美国的独立战争，英国侵略中国的鸦片战争，中日甲午战

争，反法西斯的二次世界大战，现在还在进行的中东两伊战争，越南侵略柬埔寨的战争等。为了讨论问题方便，我们将国与国之间的关系概括为三种情况。即“和平”、“紧张”（冷战）、“战争”，当然也可以把和平与冷战之间的某些情况称为和平共处。

国与国之间的关系并不是一成不变的，我们知道，随着各国经济状况和政治态度的发展，各国之间的关系也将随着发生变化。紧张状态不断加剧，最终会导致战争；战争破坏了经济，人们产生厌战情绪，又可能通过妥协、调停，转化为和平。然而这种转化并不总是以人们的愿望为转移，而有其自身的规律。象德国人民并不希望战争，但还是被希特勒卷进了一场以反对世界上绝大多数国家为目的的侵略战争，最后导致了整个工业几乎全部崩溃。因此我们探讨国家关系中间战争与和平的转化规律，特别是从量的方面把握它，这不仅是社会学向定量化方向发展的研究课题，也是现实生活中的重要问题。

6-1 关于国家关系的理论模型

对于战争与和平问题，早已有了大量的著作和论述，有的从政治角度，有的从经济角度，也有的

从社会学的角度进行分析和说明。但大多是定性的讨论，从整体上进行描述，当然这是必要的。但是我们知道，一个事物只有不仅从质的方面去把握它，而且也从量的方面去把握它时，才能对事物有更深刻的认识。我们从定量社会学的角度来探讨国家之间的竞争关系，就是从量的方面把握战争与和平问题的一个尝试。当然，定量社会学只是从一个侧面来讨论这一问题，它并不能代替以往的分析。定性分析和定量分析是相辅相成，互相补充的。以往定性的分析只给出事物发展的某些原则，定量社会学则给出了适当的数值关系，这样便于更具体的把握事物，使定性的结论更加充实。

有关变量的再讨论

定量社会学在讨论国家关系时用的变量要同客观情况相符，同时要尽可能的简单。在此我们寻找宏观变量采取了两种途径。

一种是通过社会构形的数量化。从社会成员（广义的成员，对于世界上某些国家集团来讲，一个国家就是一个成员）的态度开始，找出社会构形，然后进行平均，得到宏观变量。这就是我们对

宏观变量的直接认识。原则上讲，这些宏观变量的动力学行为是由社会成员态度的转移概率决定的，后面谈到的关于政治心理变量就是这样引人的。

另一种办法是将宏观量直接定量化。在一些情况下社会构形是不起作用的，而一些有经验的政治家、社会学家和经济学家对某种变量的整体性质和确定这些变量演化的驱动力却有着详细的了解。利用这些知识可以直接建立宏观变量的运动方程，了解它们之间的相互作用。在找到运动方程以后，可以反过来重新分析原来对宏观量的定义，变化范围是否合适。

分析战争与和平问题，即分析宏观社会集团相互作用的整体性质，没有必要引人描写相互作用的“微观细节”，可采用物理学中通常的“粗粒”近似。我们希望这种模型能在“粗粒”近似的前提下，讨论“和平”，“紧张”这些状态的稳定性，转移的可能性，趋向参数对转移影响的程度等。我们并不需要了解影响这种转移的一切因素。

我们在引人变量之前首先要指出，如果你认为从原则上不可能把政治态度之类复杂的事物用数学模型表达出来，也不能通过解方程得出事物的关系，那就无法写成这本书，特别是这一章。我们认

为，从最简单的一些问题着手。可以得到原来定性分析中得不到的具体结果。

这里我们只讨论两个国家集团间的战争与和平的关系。两个集团分别记为φ_1和φ_2，每个集团引入三个宏观变量。

1.政治心理变量P_j（$j=1, 2$）。它描写φ_j集团对另一集团的政治态度，可分为“一致”，“共处”，“紧张”几种情况。

2.物资装备变量E_j。它描写φ_j集团各种装备的总和，反映了φ_j集团的经济实力。

3.破坏变量Q_j。它描写在战争时期φ_j集团对另一集团施加破坏的程度。在和平时期$Q_j=0$。

P_j，Q_j，E_j（$j=1, 2$）这些变量的具体内容要通过一定的模型分析来建立。我们以P_j变量为重点来讨论这些变量的具体内容。

每一个宏观社会集团需要有一定的社会、经济和政治机构来协调其发展，即有一组相互耦合的称为序参量的宏观变量。根据序参量对社会的影响程度可分为弱序参量和强序参量。

弱序参量的社会灵活程度大。这样的社会不限制思想，也不规定人们对知识和物质的选择，是比较“自由”的。然而，如果序参量太弱会使社会变

成一种没有任何倾向，甚至是随机的社会。

强序参量的社会是严格的。这样的社会禁止思想的改变，规定了非常少量的可供选择的知识和物质。而序参量太强的社会则有可能成为宗教式的自封闭的专制社会。

表述φ_i政治思想的宏观变量P_i，在定性上看应该具有自加速和自饱和两个特征，比如紧张状态由于互相影响而升级变为更加紧张。当然也不可能是无限制升级，在到达某个临界点后紧张状态就要发生变化，对于缓和也应具有同样的特点。在我们建立的方程里应该体现P_i的这些定性的特点。

我们用鸽派和鹰派来区分复杂系统对战争的政治态度。从极端鸽派到中等鸽派，一直到强硬的鹰派，分别代表对待其它集团的态度从绥靖主义的，和解的，合作的，调停的，缓和的到可理解的，有节制的，逐渐发展为独断的，强硬的，对抗的，敌对的，甚至是好战的态度。为了简单，这里没有考虑战争是否正义，也没有从政治的角度对战争的性质进行分析，这些因素可以用另外的参数来表示，本书并不涉及。

我们假定从鸽派到鹰派的变化中有$2L+1$种态度，记为$a=(-L)$，$(-L+1)\cdots(-1)$，0，1，$\cdots L$。规定增加a的数值表示加强鸽派态度，反

之增加鹰派态度。a>0一般称为鸽派，a<0称为鹰派。一个国家集团的政治态度可以用集团内持各种观点的国家数来描写，这也称之为社会构形。在给定时刻t，集团φ_i中具有态度a的个体数目为$n_a^{(i)}$，则社会构形可以写为

$$\left\{ n_{-L}^{(i)}, n_{-L+1}^{(i)} \cdots n_0^{(i)} \cdots n_L^{(i)} \right\} \qquad (6.1)$$

并有关系 $\sum_{a=-L}^{L} n_a^{(i)} = N_i$，$N_i$是$\varphi_i$中的成员数。

从社会构形（6.1）可以定义政治态度的宏观变量

$$P_i = \sum_{a=-L}^{L} g_a^{(i)} \quad n_a^{(i)}$$

$$-1 \leqslant P_i \leqslant 1 \qquad (6.2)$$

权重因子g_a表示度态a对整体态度影响的大小，它应满足下列条件

$$\text{i)} \quad 0 < g_1^{(i)} < g_2^{(i)} \cdots < g_L^{(i)}$$

$$\text{ii)} \quad g_a^{(i)} = -g_{-a}^{(i)} \qquad a = 0,1,2,\cdots L$$

$$\text{iii)} \quad g_L^{(i)} = |g_{-L}^{(i)}| = 1/N_i \qquad (6.3)$$

条件i）表示随着鸽派态度变得坚决，P_i就变大；条件ii）表示鸽派态度与鹰派态度是反对称的；条

件iii）表示整个态度变量最大不超过1。当权重$g_{ik}^{(j)}$的选择不同时，P_i的定义也不同，然而都将遵从同样规律的运动方程。

下面讨论物质装备变量E_i的定义。它是φ_i中所拥有的物质财富总量，它可以由消费品C_i，投资总额J_i和国家支出S_i（服务设施，军备开支，基本建设等）分别与之相应的使用时间τ_C，τ_I，τ_S乘积之和表示：

$$E_i = C_i\tau_C + J_i\tau_I + S_i\tau_S \qquad (6.4)$$

另一方面根据我们所讨论的问题，物质装备总量E_i又可分为社会物质财富W_i和军备财产A_i。

最后讨论破坏变量Q_i的定义。我们再引入某集团被破坏的速度变量D_i（单位时间φ_i集团被破坏的装备数），建立Q_i与D_i之间的关系。在假定只有两个集团的最简单情况可有

$$\begin{aligned} D_1 &= q_1E_1E_2Q_2 \\ D_2 &= q_2E_2E_1Q_1 \end{aligned} \qquad (6.5)$$

E_2Q_2表示φ_2集团对φ_1集团的破坏实力，本身的财富E_1越多，在同样外界的破坏下，受到的损失越严重，q_1，q_2表示在战争时期的一个比例常数。

变量的运动方程

上节给出了描写系统的一组变量，但并不能从微观理论推导出它们的微分方程。在此，我们根据政治、经济方面的知识，从非线性耦合方程组的形式逐项分析。即使已经建立了运动方程，肯定也会有进一步改进的地方，比如增加变量或方程的项。如果增加变量或项以后，原来的模型仍是稳定的，那么这种增加只是一点点修正而已，并不影响我们对整体的讨论。否则，将根据实际情况彻底修正这一模型。下面给出来的方程仅仅是定量社会学的一种看法，任何批评都将有助于进一步完善定性社会学与定量社会学的联系。

首先讨论政治心理变量P_i随时间变化的运动方程。为简单起见，假定只有鸽派、鹰派两种态度，记为$a=-1, 1$。从前面P_i的定义可得到

$$P_j=\frac{n_1^{(j)}-n_{-1}^{(j)}}{N_j} \qquad (6.6)$$

而持有两种态度的国家数分别为

$$n_1^{(j)}=\frac{N_j}{2}(1+P_j) \qquad n_{-1}^{(j)}=\frac{N_j}{2}(1-P_j) \qquad (6.7)$$

其政治态度的社会构形可从P_i反映出来。同样可得到某种态度的国家数目 $n_1^{(j)}$，$n_{-1}^{(j)}$ 随时间的变化。

$$\frac{dn_1^{(j)}}{dt} = -p_{-1,1}^{(j)}\, n_1^{(j)} + p_{1,-1}^{(j)}\, n_{-1}^{(j)}$$

$$\frac{dn_{-1}^{(j)}}{dt} = p_{-1,-1}^{(j)} n_1^{(j)} - p_{1,-1}^{(j)} n_{-1}^{(j)} \tag{6.8}$$

其中$p_{-1,1}^{(j)}$表示φ_j集团中一个国家从a=1 态度（鸽派）转向a=-1态度（鹰派）的转移概率，而 $p_{1,-1}^{(j)}$表示相反的转移概率。这个转移概率是与政治态度P_i，物质装备E_i，破坏性变量Q_i有关的。我们按以前形式写成

$$p_{1,-1}^{(j)} = v\exp(u_j) \qquad p_{-1,1}^{(j)} = v\exp(-u_j) \tag{6.9}$$

经过计算可以得出

$$\frac{dP_i}{dt} = 2v\,[\sinh u_j - P_i \cosh u_j] \tag{6.10}$$

这个方程对应着第二章舆论形成模型中的平均值方程，但这里的u_j是一个依赖P_i等变量的参数，而第二章中u_j是人为给定的。

当然只有一种鸽派，一种鹰派两种态度的假定是过分简单了。可以证明对于有2L＋1种态度的一般情况，只要适当选择转移概率，就可得到完全一样的P_i运动方程，只是社会构形要复杂得多。

把转移概率的指数变量u_i，当作偏好与转移速度的函数：

$$u_1 = \delta_1 + k_1 P_1$$
$$u_2 = \delta_2 + k_2 P_2 \qquad (6.11)$$

其中δ为偏好，$\delta>0$偏好缓和，$\delta<0$偏好紧张。k为转移速率。

针对P_i的运动方程（6.10），我们可以引入势$V_1(P_1\cdots\cdots)$，$V_2(P_2\cdots\cdots)$，使其负梯度为驱动P_i运动的力。容易求出以δ，k为参数的势函数为

$$V_1(P_1\cdots) = -\frac{2\nu}{k_1^2}\{(1+k_1)\cosh(\delta_1 + k_1P_1) - k_1P_1\sinh(\delta_1 + k_1P_1)\} + C_1$$

$$V_2(P_2\cdots) = -\frac{2\nu}{k_2^2}\{(1+k_2)\cosh(\delta_2 + k_2P_2) - k_2P_2\sinh(\delta_2 + k_2P_2)\} + C_2 \qquad (6.12)$$

在δ、k为常数的最简单情况，势函数的极小值是系统可能存在的稳定态。在k一定时，δ取不同值可出现一个或两个稳定态，其临界值

$$\cosh\left[|\delta_{cj}| - \sqrt{k_j(k_j-1)}\right] = k_j$$

其中$k_j>1$ （6.13）

当$\delta_j \geqslant \delta_{cj}$即强烈偏好缓和时，系统稳定地呈现一种缓和状态；而当$\delta_j<\delta_{cj}$，虽然仍偏好缓和，但程度较差时，势函数存在两个极小值，一个深一些的极小值在$p_{j+}>0$，另一较浅的极小值在$p_{j-}<0$，对于$\delta_j=0$，两个极小值完全对称一样深。在$0<\delta_j<\delta_{cj}$时，系统发展的结局依赖于初始条件。由于非线性作用，不同的初始条件，P_j可能发展成缓和的$P_{j+}>0$，也可能发展成$P_{j-}<0$。由于势函数对δ_j有对称性，它在$\delta_j<0$时也有完全类似的结果。

以上分析显然是过于简单了。P_j是复杂的社会构形的整体变量，而参量δ_j，k_j也要依赖于其它变量的变化。作为第一级近似可以认为k_j是由各国自身“心理”作用引起的一种内在特性，而不依赖于其它变量，在一种开放的集团中，各个国家有较大独立性的情况下，k应取较小值，反之在一种内部之间协调性强，比较封闭的集团中k应取较大的值。

δ_i反映偏好程度。可以认为它不仅由集团内各国决定，而且受经济实力（E_i），政治态度（P_i），受战争破坏程度（D_i）的影响。一般写成：

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{1E} + \delta_{1P} + \delta_{1D}$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{2E} + \delta_{2P} + \delta_{2D} \qquad (6.14)$$

经济发展对态度偏好δ_{iE}的影响可写为

$$\delta_{1E} = \alpha_{11}E_1 - \alpha_{12}E_2$$
$$\delta_{2E} = \alpha_{22}E_2 - \alpha_{21}E_1 \qquad (6.15)$$

在最简单情况下，认为它们是经济实力的线性函数就已经够了。a_{ij}，a_{ii}的选择可以从实际问题出发。例如选$a_{ii}>0$表明经济实力的增长使集团中成员由于要维护自身利益而偏好鸽派，a_{ij}（$i\neq j$）>0意味着其它集团经济实力的加强，将引起本集团出于竞争的目的而偏好鹰派。

至于政治态度对偏好的影响，在仅考虑另一集团的作用（本集团自身的影响k_iP_i在前面已经讨论）时，也写成线性形式

$$\delta_{1P} = K_{12}P_2$$
$$\delta_{2P} = K_{21}P_1 \qquad (6.16)$$

对于开放集团，易受外界影响K_{ij}（$i\neq j$）应取大些，封闭式的集团，不受外界影响，K_{ij}（$i\neq j$）要小一些。外界政治态度P_2为鸽派，若使φ_1中产生

缓和偏好，双方和平共处，则可选$K_{12}>0$；反之，φ_1认为对方是鸽派软弱可欺，而加强了对紧张的偏好，则选$K_{12}<0$，这也需针对不同情况进行选择。

在战争期间还应考虑战争对偏好的影响δ_{iD}。按照实际情况我们给出如下关系：

$$\delta_{1D}=-(\beta_{11}D_1+\beta_{12}Q_1)+\frac{E_{1s}}{E_1}$$

$$\delta_{2D}=-(\beta_{22}D_2+\beta_{21}Q_2)+\frac{E_{2s}}{E_2} \quad (6.17)$$

这个式子的前一半反映受到战争的破坏D_i，将产生反抗而偏好战争；及有破坏对方的能力Q_i，则要继续扩大战果而偏好战争。后一半反映由于战争消耗了经济实力，这将产生对和平的向往，特别是当$E_i<E_{is}$（E_{is}是维持基本生活所需的经济实力）时，反战的偏好将变得很大。

在讨论P_i变化率时出现了E_i及Q_i，为使方程自洽，我们再讨论E_i，Q_i的方程。我们给出E_1，E_2具有如下规律：

$$\varepsilon\frac{dE_1}{d\tau}=\left(E_1-\frac{E_1^2}{E_{1\theta}}\right)+\nu_1P_1E_1+(\gamma_{11}P_1+\gamma_{12}P_2)E_1E_2-D_1$$

$$\varepsilon\frac{dE_2}{d\tau}=\left(E_2-\frac{E_2^2}{E_{2\theta}}\right)+\nu_2P_2E_2+(\gamma_{21}P_1$$

$$+\gamma_{22}P_2)E_1E_2-D_2 \qquad (6.18)$$

由于政治态度的变化与物质财富的变化速度不同，我们引入了标度变换因子$\tau=2vt$。方程右边第一项反映经济实力的有限制的非线性增长，E_{i0}为集团φ_i所容许的经济稳定发展水平，最后一项是战争对经济实力的破坏程度。第二、三项相当于修正项：第二项是政治态度对经济发展的影响，鸽派（$P_i>0$）有利于生产，鹰派态度（$P_i<0$）则不利于生产。第三项反映两个社会经济及政治态度之间的相互影响，具体由γ_{ij}的大小、正负来决定影响的情况。

Q_i的变化应具有以下特点：1）集团φ_i对φ_j的任何破坏都将激起φ_j的反破坏，使Q_j增大，这相当一种战争的逐步升级。2）集团内部政治态度的不同将影响破坏作用Q_j的变化。具体写成方程为下

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{dt}&=\mu_{11}(P_{1th}-P_1)Q_1+\mu_{12}D_1\\&=a_{11}Q_1+a_{12}Q_2\\\frac{dQ_2}{dt}&=\mu_{22}(P_{2th}-P_2)Q_2+\mu_{21}D_2\\&=a_{22}Q_2+a_{21}Q_1\end{aligned} \qquad (6.19)$$

其中 $a_{11}=\mu_{11}(P_{1th}-P_1)$ $a_{22}=\mu_{22}(P_{2th}-P_2)$

$$a_{12}=\mu_{12}E_1E_2 \qquad a_{21}=\mu_{21}E_1E_2$$

μ_{11}, μ_{22}, μ_{12}, μ_{21}都是正系数，这完全符合只有政治态度P_1小于某个P_{1th}鹰派阈值时，才会使战争升级破坏加大，否则政治态度对自身社会的影响，使之向和平方向转化。（6.19）式为一齐次方程组，可解出

$$Q_j(t)=C_+Q_{j+}\exp(\lambda_+t)+C_-Q_{j-}\exp(\lambda_-t)$$

其中$\lambda_\pm=\frac{1}{2}[(a_{11}+a_{22})$

$$\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}\,]$$

由于$a_{12}>0$，$a_{21}>0$，所以本征值全是实数，要想使系统的破坏变量不发散，应要求$a_{11}<0$，$a_{22}<0$并$a_{11}a_{22}>a_{12}a_{21}$，即政治态度$P_j$要低于使战争升级的阈值 P_{jth}，并且 $\mu_{11}\mu_{22}(P_{1th}-P_1)(P_{2th}-P_2)$

$>\mu_{12}\mu_{21}E_1^2E_2^2$。

到此我们已经建立了P_j，Q_j，E_j，三组变量的一系列耦合方程组。把我们的模型总结一下。

政治心理变量，即政治态度P_j的演化方程是

$$\frac{dP_j}{d\tau}=\sinh(u_j)-P_j\cosh(u_j)$$

其中标度时间 $\tau=2\nu t$。

$$u_j=\delta_{j0}+(\alpha_{ji}E_j-\alpha_{ji}E_i)+(k_jP_j+K_{ji}P_j)$$

$$-(\beta_{ij}D_i+\beta_{ji}Q_i)+\frac{E_{is}}{E_i}$$

物质装备变量E_i的演化方程是

$$\varepsilon\frac{dE_i}{d\tau}=(E_i-E_{i0}^{-1}E_i^2)+\nu_iP_iE_i+(\gamma_{ij}P_i+\gamma_{ji}P_i)E_iE_j-D_i$$

破坏变量Q_i的演化方程是

$$\frac{dQ_i}{d\tau}=\mu_{ij}(P_{ith}-P_i)Q_i+\mu_{ji}D_i$$

其中 $D_i=E_iE_jQ_i$

所有的i，j=1，2，且i≠j。

6-2 模型解的讨论

尽管我们考虑得很全面，可得到的模型仍然很简单。我们把整个方程组分为标以1，2的两个部分，共三十个参量，两个时间标度因子。对于这样一组不能再简单了的方程，也不可能用解析的办法详细讨论它的解，只能讨论定态解和在某些参数下的数值解。

由于参数太多，稳定性分析也很复杂，而且结果不明显，我们仅把一些结论归纳如下：

$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_2 = 0$ 是一组特殊的定态解，这表明和平是一稳定的状态；而存在战争，存在破坏，原则上是不会永远稳定的。和平自然是人们希望得到的一个结果。在和平环境下，各集团的经济实力$\overline{E}$,可有一个相对稳定的表达式；对于某种特定的政治态度$\overline{P}$,存在着一定的限制范围。

方程中参数值的规定

讨论方程的时间演化过程更有实际意义。给定参数以后，利用计算机求解，并把结果与现实中的某些情况加以对照，会得到一些很有趣的结论。

我们把三十个参数分成几组，分别给定数值，这样便于分析。

首先给定与偏好有关的一组参数值：

$\delta_{10} = \delta_{20} = 0$，$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{21} = 1.0$，

$\beta_{11} = \beta_{22} = 2.0$，

$E_{1S} = E_{2S} = 0.01$

这组参数的物理意义是：集团本身并没有偏好（$\delta_{10} = \delta_{20} = 0$），经济的发展对于自身是促进和平的因素，对另外集团，则因对方害怕侵略，而加强防卫，使鹰派势力抬头。在战争条件下，由于受到侵略，经济遭到破坏，使反抗情绪增加，E_{1S}，

E_{2}分别给出了战争中各自经济所能支持的限度。

其次给出经济能力变化中所有的参数值：

$\nu_1 = \nu_2 = 0.2$，　$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{21} = \gamma_{12} = 0$，

$\varepsilon = 10$，　　$E_{10} = E_{20} = 1.0$

这组参数值表示，经济的发展不受另一方政治态度的影响（$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{21} = \gamma_{12} = 0$）；在本集团内的政治态度中鸽派态度有利于生产，反之不利于生产。$\varepsilon = 10$表示经济的变化速度远远小于政治态度的改变速度。两个集团对经济的发展有一个共同的最高限度即$E_{10} = E_{20} = 1.0$。

再次给出方程中破坏变量的一些参数值：

$P_{1th} = P_{2th} = -0.9$，$\mu_{12} = \mu_{21} = 0.1$，

$\mu_{11} = \mu_{22} = 0.5$

这些参数值表明，只要政治态度不是极端的鹰派态度，由于$P_{1th} = P_{2th}$绝对值很大，破坏变量总是逐渐变小，战争也会最终停止。这组参数还表明，政治态度对破坏的影响要比遭受侵略而企图报复另一集团的影响大一些。

计算机计算时，我们再根据情况给出其余参数，以讨论不同条件下系统的发展变化。

计算机结果的分析

首先给出一部分初始条件$E_1(0)=0.2$，$E_2(0)=0.5$，$P_1(0)=-0.2$，$P_2(0)=0$。下面我们在既能说明模型基本特点，又不致太复杂的前提下，讨论几个典型的例子。

我们取参数值$K_1=K_2=0.8$，这表明两个社会集团中政治态度与转移概率之间线性关系的比例系数一样；选$K_{12}=2.0$，$K_{21}=0.0$，这表明两个集团政治态度对另外集团的偏好影响大不一样，集团φ_1对集团φ_2的偏好无任何影响，而φ_2的政治态度则要影响φ_1对“和平”的偏好；选$\alpha_{12}=1.0$，$\beta_{12}=\beta_{21}=0.0$，这表明两大集团之间经济实力对另一方的偏好影响一样大（前已给出$\alpha_{21}=1.0$），而在发生战争期间本身遭受破坏的程度并不影响对方的偏好。

讨论在和平的初始条件下$D_1(0)=D_2(0)=0$，计算机的结果，如图6.1所示。$D_1(\tau)=D_2(\tau)=0$，两集团维持永久的和平状态。物质装备变量$E_1(\tau)$，$E_2(\tau)$经过很短时间的增长，达到同一饱和状态，$E_1(\tau)=E_2(\tau)=1.0$，只是有一微小的涨落作

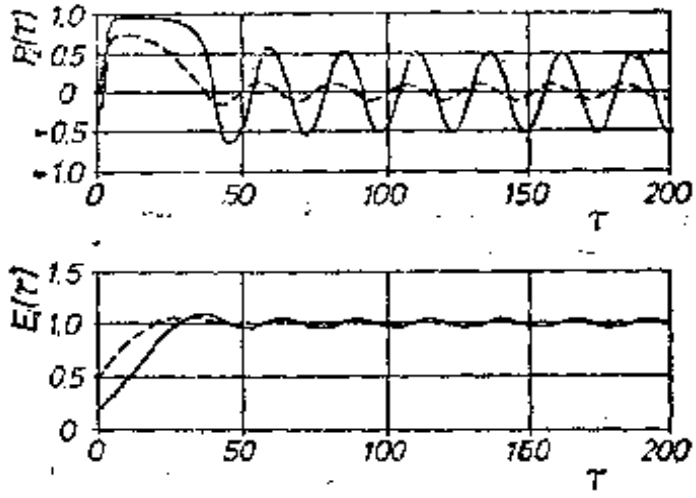


图6.1 在前面给定参数条件下，作出的$\varphi_1\varphi_2$两集团中变量$E_i(\tau)$ $P_i(\tau)$随时间的演化曲线
——φ_1中的量，……φ_2中的量

用。政治态度变量P,将围绕$P_i=0$的平均值作周期振荡，由于$K_{12}=2.0$，集团φ_1的政治态度变化更剧烈而已。计算结果还表明，当初始有一较小的破坏率存在$D_2(0)\neq 0$,系统也会很快恢复到“和平”的定态上，有与图6.1一样的结果。

图6.1说明了今天世界上大多数国家之间的状态，虽然一些国家的政治态度经常有所反复，但是一直保持和平的政治局面。

下面给出一个在战争状态下系统变化的情况。参数值仍然与图6.1相同，而初始条件变为$D_2(0)=0.3$。这相当φ_1对φ_2入侵使φ_2遭到较大破坏，通过计算机可得到下面结果。

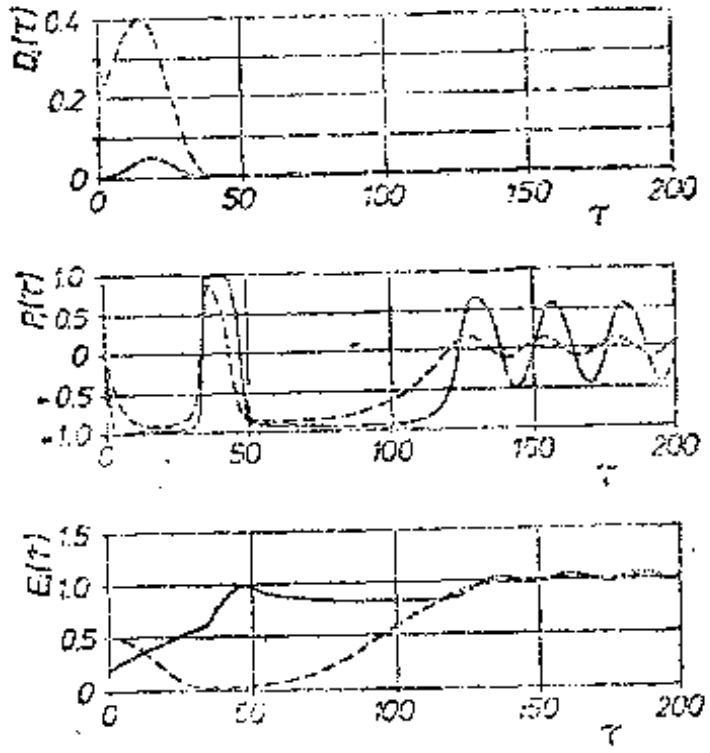


图6.2 除$D_2(0)=0.3$初始条件改变外，其余参数与图6.1相同，变量$P_i(\tau)$ $E_i(\tau)$ $D_i(\tau)$随时间的演化图

——φ_1中的量，……φ_2中的量

该图表明，从战争开始到最后稳定在和平环境中的一个全过程，而在不同阶段有着不同的特点。

在$0<\tau<30$时：从图上可以看出φ_2遭到破坏，由于互相影响，φ_1，φ_2的政治态度都迅速向鹰派转化，双方发生战争，在$E_i(\tau)$的演化图上看到φ_2的经济实力遭到很大破坏，几乎降为零。

在$30<\tau<40$时：从图上可以看出，这时在政

治态度上，双方都向停战方向转化，这可能是由于φ_2经济崩溃和双方非线性互作用的结果。最终战争结束，破坏程度最严重，这从$D_i(\tau)$的图上显示出来。

在$40<\tau<50$时：战争结束了，战争遗留下来的经济发展不平衡，战胜国与战败国之间的矛盾使双方的关系又趋于紧张，这体现在$P_i(\tau)$的图上，双方的政治态度从缓和又变为紧张，这可以看成是战后的第二个时期，即双方关系开始紧张的时期。

在$50<\tau<120$：这一段时间比较长，战败的一方经济复苏，不断发展；由于经济建设的需要，政治态度也趋于缓和，这一特点显示在$E_i(\tau)$和$P_i(\tau)$的图上。我们称为战后第三个时期，即经济恢复时期。

在$\tau>120$时：从图上可以看出这时经济发展已经达到一个相对稳定的水平，政治态度虽然在稳定值附近波动，仍然表示处在和平条件下。由于受φ_2的影响，集团φ_1的波动有较大的振幅，最后恢复到完全和平的状态。

这样一幅时间演化图象也是我们经常看到的交战双方发展的图象。这里我们由微分方程组再现了现实中的景象。

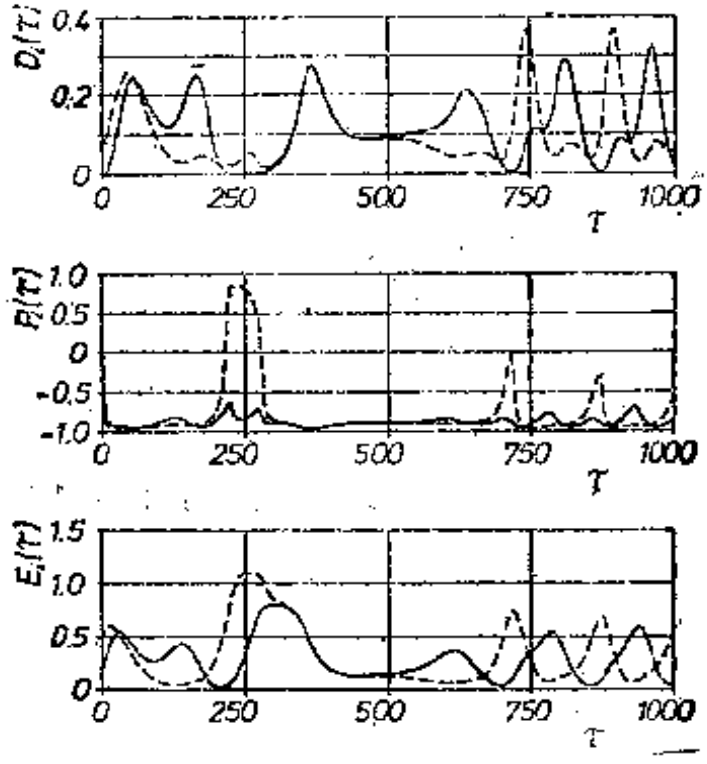


图6.3 在完全对称的参数条件下，取初始条件 $D_2(0)=0.095$时，$D_i(\tau)$，$E_i(\tau)$，$P_i(\tau)$三个变量随时间的演化图
——φ_1中的量，……φ_2中的量

我们适当改变上面参数值，使之完全对称：$K_1=K_2=1.0$（政治态度对转移概率影响很大，相当有很高的宣传水平），$K_{12}=K_{21}=0.5$，$\alpha_{12}=1.0$，$\beta_{12}=\beta_{21}=0$，$D_1(0)=D_2(0)=0$。

完全对称的参数条件，在没有战争的初始条件下，虽然开始两集团的政治态度和经济实力不同，但经过互相影响会稳定在同一确定的水平上：政治

上互相欺骗，维持紧张冷战，经济上高度发展。

这种状态在φ_2受到一点侵犯 取 $D_2(0)=0.095$ 时，就会打破原来的和平均势，图6.3描绘了计算机计算的结果，下面我们从图上将会看到另一种景象。

在$0<\tau<240$时：由于参数完全对称，从图上我们看到受攻击的φ_2以加倍的努力反击φ_1，双方经济实力进一步遭到破坏，政治态度也一直保持在紧张状态上。

在$240<\tau<260$时：φ_2中厌倦战争气氛增长，强烈要求和平，而φ_2政治态度的改变并没有得到φ_1的响应，φ_1继续好战，坚持对φ_2的战争。

在$260<\tau<500$时：从图上可以看出这一段双方仍保持紧张状态，而在经济上都遭到了很大的破坏。

$500<\tau<1000$时：从图上看出$\tau=500$时，两个集团的所有变量几乎都具有同样的值，$E_1\approx E_2$，$P_1\approx P_2$，$D_1\approx D_2$。根据两个集团所有参量都一样保持对称的假定，它们今后的发展也将保持一致，尽管会有一些波动。但由非线性方程理论可知，稍有差别的初始条件就会导致完全不同的演化径迹。这里出现比较规律的结果，是由于实际上存在有第三

者充当调停人，这才能使各变量基本稳定下来，当然在我们的模型里是不讨论第三者的。

通过我们上面的分析可以看到：

和平是一个稳定的状态，虽然有些时候会经过战争过程，但最终仍然要达到一个和平的状态。

我们的模型对初始条件很敏感，特别是在临界点附近，微观上的一点改变，将会使系统在宏观上有较大的改变。

我们具体给出了两类不同战争的演变情况，从某种程度上它可以分别类比第二次世界大战德国和其它反法西斯国家，以及中东两伊战争的双方。当然理论模型不可能完全与实际一样，但它在一定程度上反映了客观实际，使我们有可能对现实作出某些合乎逻辑的推断。

最后，我们要指出，这里只是提出一个模型，并不能要求它对战争与和平问题作出全面的解答，更不能要求通过定量社会学的讨论给出维护和平的灵丹妙药。关于战争与和平问题的讨论，这里只是开了个头，还有大量工作可作，而且可以肯定，随着研究工作的深入，将会得到更多更具体的结果。

* * *

由于篇幅的限制，我们不可能作更详细的介

绍，这里谈的主要是一些基本概念和基本模型。正如读者在看完本书所感到的，从解决实际问题的角度来看，这本书只是介绍了一些模型和研究方法，没有讨论太多的实际问题，它只是告诉我们，社会学的问题完全可能用定量的办法来进行讨论。定量社会学给我们指出了一条研究的途径，解决具体问题，还需要大批自然科学工作者和社会科学工作者的共同努力，作长时期的奋斗。

在结束本书之前，我们还要指出，除了韦德里希和哈格等人在定量社会学方面作了大量的开创性的工作以外，还有不少科学家也关心这方面的问题，并作出了不少的贡献。在这方面值得一提的是比利时布鲁塞尔学派的普里戈金和埃伦（Allen）等人，他们把物理学中的自组织理论运用到城市演化、经济发展等问题上去，并且取得了突破性的进展。关于这方面的情况，我们将在其它的书中介绍给读者。

我国著名科学家钱学森教授几年前就提出，把系统工程和物理学中的自组织理论结合起来，讨论社会科学问题，这为定量社会学的研究提出了一条捷径。最近不少专家在钱学森倡议的启发下，开始了这方面的研究。我们相信在我们历史悠久，人材

荟萃的大国里，充分发挥自己的优势，一定会在社会科学定量化研究方面作出自己应有的贡献。